Lorenzo Orio

Analisi matematica non standard I

Lorenzo Orio

Analisi matematica non standard–I

Nuova edizione

Solonghello (AL) 2015

SOMMARIO

Cap. 0 – LE BASI DELL’ANALISI NON STANDARD

0.1. PREMESSA

È nota la difficoltà dell’insegnamento-apprendimento nei confronti dell’analisi matematica, spesso denominata *analisi infinitesimale*, nelle scuole superiori.

Essa è dovuta principalmente all’eccessiva “complicazione” e pesantezza formale dei suoi concetti essenziali (limite, derivata, integrale) e delle dimostrazioni connesse.

Chi oggi studia analisi nelle scuole superiori o all’Università fa fatica a capire il motivo di quell’aggettivo *infinitesimale* che ogni tanto riappare.

All’inizio (tra il 1670 e il 1680) con Leibniz, insieme a Newton, a fondamento di tutto c’era l’infinitesimo, numero piccolissimo eppur diverso da zero, derivate ed integrali si definivano semplicemente come rapporti o somme di infinitesimi.

A causa delle critiche su alcuni aspetti contraddittori di questi enti (nel modo in cui venivano trattati), *l’infinitesimo attuale* fu abbandonato e, nell’Ottocento, Cauchy ridefinì derivate ed integrali in termini di *limiti* invece che di infinitesimi e Weierstrass diede una formulazione rigorosa di limite, quella nota come e–d.

Come si è detto questo nuovo approccio, rigoroso e formale, risulta molto ostico agli studenti a causa della sua astrusità soprattutto nella definizione di limite, concetto fondamentale dell’analisi classica.

Nel 1960 Robinson risolse il problema, vecchio di trecento anni, di dare una trattazione rigorosa dell’analisi matematica usando gli infinitesimi.

Robinson in realtà non era un analista, ma un logico matematico e fu proprio un teorema di logica, quello di compattezza, che gli fornì lo strumento per reintrodurre con tutti gli onori gli infinitesimi nella matematica, dopo secoli di esilio.

Gli infinitesimi nel senso di Robinson non sono stati applicati solo all’analisi elementare ma alla ben più vasta materia dell’analisi nella sua interezza. Poiché gli iperinteri infiniti di Skolem sono usualmente chiamati interi non standard, Robinson chiamò il nuovo argomento “analisi non standard”. Egli chiamò i numeri reali “standard” e gli altri numeri iperreali “non standard”.

Kurt Gödel, il più famoso logico del XX secolo, nel 1973 affermò: “Ci sono buoni motivi per credere che l’Analisi non standard in una versione o in un’altra sarà l’Analisi del futuro”.

Vari sono i motivi per cui, soprattutto in Italia, l’analisi non standard (NSA: Non-standard Analysis) stenti a prendere piede.

Questo lavoro si propone di dare alcune motivazioni al riguardo e soprattutto di proporre un approccio didattico a questa “versione” dell’Analisi.

0.2. COSTRUZIONE DEI NUMERI IPERREALI

Definiamo numeri che siano infinitamente piccoli ma non necessariamente uguali a 0.

Definizione 1 *(Infinitesimo).*

Un numero *e* è detto *infinitamente piccolo* o *infinitesimo* se "$a \in \Re$ *con* $a > 0$ si *ha*

$-a < e < a$

Nota 1. *L'unico numero reale che è anche infinitesimo è* 0.

Gli infinitesimi sono quindi di tre tipi:

infinitesimi positivi, il numero reale 0, infinitesimi negativi.

Se ε è un infinitesimo positivo allora

- $-\varepsilon$ è un *infinitesimo negativo;*
- $1/\varepsilon$ è un *infinito positivo*, cioè un numero maggiore di ogni numero reale;
- $-1/\varepsilon$ è un *infinito negativo*, cioè un numero minore di ogni numero reale.

Nota 2. *Analogamente ad* $\Re$ *non è definito* 1/.

Visione "al microscopio" degli infinitesimi
(Analogamente alla metafora utilizzata da H. J. Keisler, in "Elementi di analisi matematica")

Visione "al telescopio" degli infiniti

L’insieme $\Re^*$

Aggiungiamo agli elementi di $\Re$ gli infinitesimi, gli infiniti e ogni numero infinitamente vicino ad ogni reale (vedi figura precedente).Cerchiamo di aritmetizzare questo nuovo insieme definendo le operazioni interne in modo analogo a quanto vale per $\Re$.

L’insieme così ottenuto si chiama *insieme dei numeri iperreali* e si indica con $\Re^*$.

Definizione 2 *(Numeri finiti).*

Un numero iperreale è detto *finito* se è compreso tra due numeri reali.

Osservazione 1. Gli elementi di $\Re^*$ si suddividono in

• infiniti negativi

• numeri finiti che possono essere

– reali

– infinitesimi negativi

– infinitesimi positivi

– iperreali finiti

• numeri infiniti positivi

Si può dimostrare il seguente

Teorema 1 (Aritmetizzazione dei numeri iperreali o “regole” per i numeri iperreali).

Supponiamo che *e, d* siano siano iperreali infinitesimi *b, c* siano iperreali finiti ma non infinitesimi e *H, K* siano iperreali infiniti, si ottiene quanto segue.

Reciproci:

• $1/b$ è finito ma non infinitesimo

• $1/H$ è infinitesimo

Somme:

• $e+ d$ è infinitesimo

• $b + e$ è finito ma non infinitesimo

• $b + c$ è finito, ma può anche essere infinitesimo

• $H + e$ e $H + b$ sono infiniti

Prodotti:

• $e\times d$ e $b\times e$ sono infinitesimi

• $b\times c$ è finito ma non infinitesimo

• $H\times b$ e $H\times K$ sono infiniti

Quozienti:

• e/b , e/H, e b/H sono infinitesimi

• b/c è finito ma non infinitesimo

• se $e \neq 0$ allora b/e, H/e e H/b sono infiniti

Esponenti e radici:

se $e>0$, $b>0$, $c>0$ allora

• ε^c è infinitesimo

• b^c è finito ma non infinitesimo

• H^c è infinito

• è infinitesimo

• è finito ma non infinitesimo

• , con $H > 0$, è infinito.

L'insieme $\Re^*$ si può ordinare in modo analogo ad $\Re$.

Con questo ordinamento vale il

Teorema 2 (Ordinamento dei numeri iperreali).

1. ogni numero iperreale compreso tra due infinitesimi è infinitesimo
2. ogni numero iperreale compreso tra due iperreali finiti è finito
3. ogni numero iperreale maggiore di qualche infinito positivo è infinito positivo
4. ogni numero iperreale minore di qualche infinito negativo è infinito negativo

ESEMPI di riconoscimento di infinitesimi, infiniti, finiti (indicheremo gli infinitesimi con lettere minuscole dell'alfabeto greco, gli infiniti con lettere maiuscole dell'alfabeto latino).

1) **(**$c, \delta \neq 0$) è un iperreale finito, in quanto ε è un infinitesimo, δ è un infinitesimo quindi 2δ è infinitesimo, b è finito quindi b–3ε è finito, c è finito quindi $c + 2\delta$ è finito diverso da 0, il rapporto di due numeri finiti è finito (con denominatore non nullo, come si è fatto capire).

2) è un infinitesimo; infatti:

= = è una somma di infinitesimi.

3) è un iperreale finito; infatti:

= con e infinitesimi.

4) con H infinito positivo, è un infinitesimo; infatti:

=

Parte reale o parte standard

Definizione 3. I numeri b, c sono detti *infinitamente vicini tra loro* se la loro differenza $b - c$ è infinitesima, ciò si indica con $b \approx c$.

Assumiamo che ogni numero iperreale sia infinitamente vicino ad uno ed uno solo numero reale (chiamato parte reale o “parte standard” dell’ iperreale stesso. Vedi assiomi…).

Definizione 4. *Sia b un iperreale finito. La* ***parte standard*** *di b, denotata con* st(b)*, è il numero reale che è infinitamente vicino a b. I numeri iperreali infiniti non hanno parte standard.*

Indicheremo ciò con $\mathrm{st}(H) = \infty$ *(dove si è usata lettera maiuscola per gli iperreali infiniti).*

Nota 3. Qualche autore scrive che st(H) *non esiste:* in $\Re$ non ci sono numeri infiniti.

Osservazione 2. Se e è un infinitesimo, allora $b \approx b + e$.

Nota 4. Ne segue che $b \approx 0$ è un modo abbreviato per indicare che b è un infinitesimo.

Osservazione 3. b è un infinitesimo se e solo se $b \approx 0$.

Osservazione 4. Se b e c sono due numeri reali e b è infinitamente vicino a c allora $b = c$.

Teorema 3. La funzione st : $\Re_f^* \to \Re$ (essendo $\Re_f^*$ l’insieme $\Re^*$ privato degli infiniti) è "compatibile" con le operazioni “solite”; in altre parole:

a) st(-a) = -st(a)

b) st($a + b$) = st(a) + st(b)

c) st(ab) = st(a)st(b)

d) st(a/b) = st(a)/st(b), se st(b) ≠ 0

e) st(a^n) = (st(a))^n , n N_0

f) st( ) = , n N_0 ,

g) st(a) st(b) se a b

TUTTO CIÒ SI PUÒ FORMALIZZARE COME SEGUE

Assiomi sui numeri reali

Assioma 1 (assiomi algebrici per i numeri reali).

1. LEGGI DI CHIUSURA : 0, 1 $\in \Re$

$\forall a, \forall b \in \Re \Rightarrow (a + b \in \Re \wedge ab \in \Re \wedge -a \in \Re)$

$\forall a \in \Re \wedge a \neq 0 \Rightarrow 1/a \in \Re$.

2. LEGGI COMMUTATIVE : $a+b=b+a$, $ab=ba$.

3. LEGGI ASSOCIATIVE : $a+(b+c)=(a+b)+c$, $a(bc)=(ab)c$

4. LEGGI DELL'IDENTITÀ : $0 + a = a$, $1 \times a = a$.

5. LEGGI DELL'INVERSO : $a+(-a) = 0$. Se $a \neq 0$, $a \times (1/a) = 1$

6. LEGGE DISTRIBUTIVA : $a(b+c) = ab+ac$.

Assioma 2 (assiomi ordinali per i numeri reali).

1. $0 < 1$.

2. LEGGE TRANSITIVA : Se $a<b$ e $b<c$, allora $a<c$.

3. LEGGE DI TRICOTOMIA : Vale una e una sola delle seguenti relazioni $a<b$, $a=b$, $b<a$.

4. LEGGE DELLA SOMMA : Se $a<b$, allora $a+c < b+c$.

5. LEGGE DEL PRODOTTO : Se $a<b$ e $0<c$, allora $ac < bc$.

6. ASSIOMA DELLA RADICE : Per ogni numero reale $a>0$ e ogni intero positivo n, c'è un

numero reale $b>0$ tale che $b^n = a$.

Assioma 3 (archimedeo).

Per ogni numero reale a esiste un intero positivo n tale che $a<n$.

(oppure: Siano a e b reali positivi con $a<b$. Esiste un intero positivo n tale che $na>b$).

Assiomi sui numeri iperreali

Assioma 1 (assiomi algebrici per i numeri iperreali).

Ogni numero reale è iperreale.

Se a e b sono numeri iperreali lo sono pure $a+b$, ab, $a-b$.

Se a è un numero iperreale e $a \neq 0$, $1/a$ è un numero iperreale.

Le leggi commutative, associative, dell'identità, dell'inverso e distributiva valgono per tutti i numeri iperreali.

Assioma 2 (assiomi ordinali per i numeri iperreali).

La legge transitiva, la legge di tricotomia, la legge della somma e la legge del prodotto valgono per tutti i numeri iperreali.

Per ogni numero iperreale $a > 0$ e per ogni intero positivo n esiste un numero iperreale b tale che $b^n = a$.

Assioma 3 (dell'infinitesimo).

Esiste un numero iperreale infinitesimo positivo.

Assioma 4 (della parte standard).

Ogni numero iperreale finito è infinitamente vicino ad esattamente un numero reale.

Assioma 5 (della funzione).

Per ogni funzione reale f, di una o più variabili, esiste una corrispondente funzione f^* dello stesso numero di variabili, chiamata *estensione naturale di f*.

Le estensioni naturali delle funzioni somma, differenza, prodotto e reciproco sono le funzioni iperreali date nell'assioma 1.

Assioma 6 (di soluzione).

Se due sistemi di formule hanno esattamente le stesse soluzioni reali, allora essi hanno le stesse soluzioni iperreali.

(Un sistema di formule è un insieme finito di equazioni e disequazioni.)

Osservazioni importanti

Sappiamo che $\Re$ è l'unico campo[1] ordinato e completo, a meno di isomorfismi.

• È chiaro che $\Re^*$, pur essendo un campo ordinato, **non** può essere completo, altrimenti sarebbe isomorfo a $\Re$; infatti l'insieme degli infinitesimi non può avere estremo superiore[2] (e inferiore) in $\Re^*$, come facilmente si può verificare.

• Né $\Re^*$ può soddisfare la proprietà di Archimede: infatti se x è un numero reale positivo ed e un infinitesimo positivo, non esiste $n \in N$ tale che $ne > x$.

Si noti però che $\Re^*$ è ***iperarchimedeo***, infatti se x è un numero iperreale positivo ed e un infinitesimo positivo, esiste $n^* \in N^*$ (insieme degli iperinteri, contenente gli interi infiniti) tale che $n^*e > x$. Basta prendere $n^* > x/e = H$ (infinito certamente esistente).

L'assioma (n.6) di soluzione, qui citato, è analogo al *principio del transfert* (o principio di **Leibniz**): Sia $P(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ una proprietà degli oggetti standard $a_1, a_2, \ldots, a_n$ espressa in *forma elementare*. Allora $P(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ vale se e solo se la stessa proprietà vale per le corrispondenti estensioni nonstandard, cioè:

$P(a_1, a_2, \ldots, a_n) \Leftrightarrow P()$

Una proprietà P è espressa in forma elementare (o in linguaggio del prim'ordine) quando è espressa da una formula in cui ogni quantificatore è *ristretto* ad un insieme. In altre parole, ogni volta che si ha una quantificazione "per ogni x…" oppure "esiste un y ", è necessario specificare all'interno di quali insiemi le variabili x e y stanno variando: "per ogni $x \in$ A…" oppure "esiste $y \in$ B…". Non è invece ammesso quantificare su sottoinsiemi, cioè le formule che contengono espressioni del tipo "per ogni sottoinsieme X $\subseteq$ A…" non sono espresse in forma elementare.

Analizzando, quindi, la usuale definizione di completezza, si nota che essa contiene una quantificazione **non** ristretta: "per ogni **sottoinsieme** non vuoto di $\mathfrak{R}$". Non è quindi espressa in forma elementare e non possiamo pertanto applicarvi il principio del transfert .

Notiamo invece che la proprietà archimedea è espressa in linguaggio del primo ordine ed infatti vale in $\mathfrak{R}$* a patto, naturalmente, di considerare gli iperinteri al posto dei semplici interi (dei quali – gli iperinteri – rappresentano l'estensione nonstandard).

NOTA IMPORTANTISSIMA. Noi ci serviremo dei numeri iperreali (e delle loro proprietà) come "nuovi e più potenti attrezzi" per ottenere risultati nel campo reale: il passaggio dagli iperreali ai reali ce lo fornirà la funzione "parte standard". Passeremo da $\mathfrak{R}$ a $\mathfrak{R}$*, da *f* a *f e viceversa. Faremo questo automaticamente, senza specificarlo ogni volta.**

0.3. ESEMPI DI PARTI STANDARD

Trovare la parte standard dei seguenti numeri.

1) α = . Avremo:

α =

$$\frac{2H\left(\sqrt{7+\frac{1}{H}}-\sqrt{7}\right)\left(\sqrt{7+\frac{1}{H}}+\sqrt{7}\right)}{\left(\sqrt{7+\frac{1}{H}}+\sqrt{7}\right)}=\frac{2H\left(7+\frac{1}{H}-7\right)}{\sqrt{7+\frac{1}{H}}+\sqrt{7}}=\frac{2H\left(\frac{1}{H}\right)}{\left(\sqrt{7+\frac{1}{H}}+\sqrt{7}\right)}=\frac{2}{\left(\sqrt{7+\frac{1}{H}}+\sqrt{7}\right)}.$$

Quindi: st(α) = .

2) α = . Avremo: α = , con . Quindi: st(α) = .

3) α = . Avremo: α = , con . Quindi:

st(α) = +∞ o, meglio, non esiste st(α).

4) α = . Avremo: α = = . Quindi: st(α) = 0.

5) α = . Avremo: α = , essendo: *d* e *g* infinitesimi

non nulli, *a* finito non infinitesimo. Quindi: st(α) = 0.

6) α = , con x, y finiti non nulli. Avremo:

α = . Quindi: st(α) = $x+y$.

7) α = . Avremo:

α =

con K infinito positivo, e opportuno infinitesimo negativo. Quindi: st(α) = 0.

8) α = , con st(a) = 2 , α > 2. Avremo:

α = , cioè:

α . Quindi:

st(α) = st( ) = 0 ×12 + =

0.4. CASI NOTEVOLI DI PARTI STANDARD

Diamo ora un elenco di parti standard di numeri iperreali, o meglio di espressioni con numeri iperreali, particolarmente importanti per i calcoli futuri.

1) con e misurato in radianti, e infinitesimo.

Dim.

Sia ε un infinitesimo positivo. Avremo (riferendoci alla circonferenza trigonometrica, fig. 0):

Fig. 0

Area (triangolo AOH) < Area (settore AOK) < Area (triangolo BOK). Essendo quindi

Arco AK = ε , AH = sinε , OH = cosε , BK = tgε , AO = OK = 1, si ha

Dividendo per sin ε (sin ε > 0):

o anche . Da cui, essendo

st(cosε) =1 st( ) = 1 si otterrà appunto st .

Analogamente per ε < 0.

Nel caso in cui la misura x dell'angolo non sia espressa in radianti, ma in gradi sessagesimali, chiamando n questa misura, si avrebbe: ,

perciò .

2) Vogliamo calcolare con *K* iperreale infinito.

Consideriamo la successione([3])

Si dimostra che è convergente, cioè che st , essendo *H* iperintero infinito.

Verifichiamo ora che il numero *e* è compreso fra 2 e 3.

Utilizzando la formula della potenza del binomio, si trova:

(**)

Poiché gli addendi del secondo membro sono tutti positivi si ha, per ogni *n*, . Inoltre, al crescere di *n*, ciascuno dei fattori ; ; ; … ; , che figurano nei vari addendi del secondo membro della (**), cresce, ma sono tutti minori di 1. Si ha quindi:

. Ma : ; … .

Pertanto, per *n* > 2 si ha, a maggior ragione, .

Il secondo membro è formato dal numero 2 più la somma di *n*- 1 termini di una progressione geometria di ragione . Avremo: .

Quindi e dunque , c.v.d.

Calcoli opportuni hanno fornito per *e* il valore approssimato:

e = 2,7182818284…

Concludendo: , con K iperreale infinito.

Il numero e ha molta importanza nell'analisi matematica perché viene assunto come base di un sistema di logaritmi, che si dicono *naturali* o *neperiani* dal nome del matematico, astronomo e fisico scozzese John Napier (Merchiston Castle, 1550 – Edimburgo, 4 aprile 1617), noto come Giovanni Nepero (o semplicemente **Nepero**), il quale ebbe il merito di esporre per primo una teoria dei logaritmi nei quali assumeva come base il numero che differisce da e per meno di 10^{-6}.

Il numero e è un numero *irrazionale*, come il numero p, è un *irrazionale non algebrico*, cioè *trascendente*, vale a dire un numero *che non è soluzione di nessuna equazione algebrica a coefficienti interi*.

Il logaritmo neperiano di un numero a si denota semplicemente con lna.

3) Vogliamo calcolare con n reale qualunque non nullo. Avremo:

 essendo infinito, infinitesimo. Quindi (teorema 3(e) del 0.2).

4) Sia con a reale non nullo, $a \neq 1$, e infinitesimo non nullo.

Avremo . Poniamo , con H iperreale infinito, ottenendo

, da cui (proprietà dimostrata in II.8).

In particolare si ha: con e infinitesimo non nullo.

5) Vogliamo calcolare con *e* infinitesimo non nullo, *a* reale positivo.

Ponendo , si ha , . Si nota che se *e* è infinitesimo lo è pure *d*, quindi , per l'esempio precedente.

In particolare si ottiene .

6) Sia α = , con *H* positivo. Avremo: α = , con *K* infinito (positivo)

Quindi: st(α) = 1.

7) Sia α = , con *H* positivo. Avremo:

α = , con *K* infinito positivo, *e* infinitesimo positivo.

Quindi: st(α) = 1.

8) Sia α = , con *H* positivo. Avremo: α = = . Quindi:

st(α) = +∞ o, meglio, non esiste st(α).

[1] N.B. Campo: struttura algebrica dotata di due operazioni, le quali hanno tutte le proprietà dell'addizione e della moltiplicazione tra numeri reali.

[2] N.B. Per la definizione di *estremo (inferiore* e *superiore)* vedi I.4.

[3] N.B. Dicesi ***successione*** un insieme ordinato di elementi di qualsiasi natura contrassegnati mediante un indice che assume valori nell'insieme dei numeri naturali. Sinteticamente si tratta di una funzione con dominio N (oppure N-{0}) e codominio generalmente ℜ.

Cap. I – GENERALITÀ SULLE FUNZIONI

I.1. FUNZIONI MATEMATICHE

Ci occuperemo esclusivamente di funzioni “matematiche”, cioè di funzioni fra insiemi numerici (principalmente numeri reali o iperreali), le quali possono essere espresse da equazioni nelle due variabili *x* e *y*. Si scriverà $y = f(x)$, leggendo: “*y* uguale effe di *x*”, intendendo (come si fa in analisi classica) la “*x*” come variabile indipendente, cioè come elemento dell’insieme-dominio o “campo di esistenza”([1]) della funzione (come si fa in analisi moderna) ed intendendo la “*y*” come variabile dipendente, cioè come elemento dell’insieme-codominio, in breve come immagine (funzione appunto) di *x*.

Ci troveremo soprattutto di fronte ad espressioni del genere:

; ; ,

nelle quali il legame funzionale (la “legge”, per così dire, che associa ad un valore di *x* uno ed uno solo valore di *y*) è espresso appunto dalla “formula” stessa, cioè fissato un valore di *x* (elemento del dominio), si può ricavare il corrispondente valore di *y* attraverso l’equazione data.

I.2. CLASSIFICAZIONE DELLE FUNZIONI MATEMATICHE

Le funzioni matematiche si distinguono in **algebriche** e **trascendenti**.

Sono **algebriche** quelle funzioni nelle quali la relazione che passa fra *x* ed *y* si può ridurre ad un'equazione algebrica di grado qualsiasi nelle due variabile *x* ed *y*. Il grado di questa equazione è pure il grado della funzione. Quindi il valore di queste funzioni si ottiene eseguendo solo le seguenti operazioni sul loro argomento (la variabile *x*): addizione, sottrazione, moltiplicazione, divisione, elevamento a potenza (estrazione di radice di ordine qualsivoglia).

Queste funzioni algebriche prendono poi il nome di **funzioni razionali intere** (nell'equazione non figurano divisioni, riguardanti in qualche maniera la variabile *x*, né radicali), **funzioni razionali fratte** (compaiono divisioni…), **funzioni irrazionali** (vi sono radicali il cui argomento riguarda la variabile *x*), ecc.

Ogni funzione che non sia algebrica si dice invece **funzione trascendente**.

Per esempio sono funzioni algebriche le prime due accennate in questo inizio di capitolo, come pure lo è la seguente:

.

Sono trascendenti la terza accennata e le seguenti:

y = sen x (oppure, in termini "informatici" o alla latina,) ; ; y = tg x ; $y = a^x$.

NOTA. In seguito ci occuperemo solo di funzioni reali di variabile reale o iperreale, cioè tali per cui sia le immagini che le contro immagini siano numeri reali o iperreali.

In simboli: $f : A \rightarrow B$ con $A \subseteq \Re$, $B \subseteq \Re$ oppure $A \subseteq \Re^*$, $B \subseteq \Re^*$.

I.3. RAPPRESENTAZIONE CARTESIANA DELLE FUNZIONI

Una funzione numerica (o *applicazione*) reale $y = f(x)$ di una variabile reale si può rappresentare col diagramma cartesiano (o grafico) nel modo ben noto dalla geometria analitica (rappresentazione grafica).

Il diagramma è l'insieme dei punti $(x, f(x))$ del piano cartesiano ortogonale $O(x,y)$; nei casi più comuni tale insieme è apprezzabile dall'intuizione come una linea: questa linea è incontrata in un solo punto da ogni parallela all'asse delle y, quando $x \in E$ (dominio([2])); il suo andamento rende visivo il comportamento della funzione $f(x)$ al variare di x nell'insieme di definizione.

In breve si può dire che il grafico di una funzione è la rappresentazione visiva del grafo (vedi TEORIA DEGLI INSIEMI, Appendice 2) della funzione stessa.

Esistono funzioni che, anche se definite a parole in forma semplice, hanno un diagramma che non è una linea intuitiva. Per esempio la funzione (di Dirichlet)

ha il diagramma in parte sul segmento $0 \leq x \leq 1$ dell'asse delle ascisse e in parte sul segmento ad esso parallelo, avente ordinata 1, in ogni intervallo per quanto "piccolo" la $y(x)$ salta infinite volte da 0 a 1 e viceversa senza assumere mai alcun valore intermedio. Ecco un tentativo di grafico in figura 1):

Fig. 1

A noi interesseranno soprattutto funzioni che avranno grafici “regolari”, come succede per le funzioni algebriche (che noi studieremo) date attraverso un’unica espressione analitica, reali di variabile reale, le quali avranno applicazione pure in economia.

OSSERVAZIONE IMPORTANTE. Nel linguaggio comune si è spesso abituati a confondere il termine “funzione” con “grafico della funzione”, affermando ad esempio che una certa funzione ha “la concavità verso l’alto” in un certo intervallo. È evidente che si intende parlare della concavità del grafico disegnato che rappresenta la funzione data.

Analoga cosa succede nei riguardi degli elementi del dominio e del codominio, i quali a volte vengono chiamati “numeri” (come in effetti è) a volte “punti”, poiché fra questi due enti c’è corrispondenza biunivoca per mezzo della retta reale. Anche in questo secondo caso perciò entra in gioco la nostra intuizione che ci fa “vedere” i numeri come punti e le funzioni come insiemi (grafici) di punti.

Anche noi useremo la parola “punto” al posto di “numero reale (o iperreale)” quando questo non creerà confusione, mentre saremo più cauti nello scambiare la parola “grafico” con “funzione” (lo faremo solo nel caso non ci sia la minima incertezza).

I.4. MASSIMO, MINIMO, ESTREMI

Diamo dapprima la seguente

Definizione [I.4.1]. Un punto p (= numero = elemento) di un insieme E si dice **infinitamente avvicinabile** in E se, per ogni infinitesimo positivo e, il punto $p+e$ o il punto $p-e$ (o entrambi i punti) appartiene ancora ad E (vedi Appendice par. A.2.8). In caso contrario il punto si dice **isolato**.

Sia $f(x)$ una funzione definita in E e sia un punto (= numero = elemento) di E infinitamente avvicinabile in E: si dice che è un punto di **minimo relativo** per $f(x)$ e che $f(\ )$ è un minimo relativo, quando [3].

Analogamente si definisce punto di **massimo relativo** per $f(x)$; la relazione allora diventa: $f(x) \leq f(\ )$.

In particolare, se la relazione vale per tutti i punti di E, si dice che il punto è un **minimo (massimo) assoluto**.

Per insiemi finiti è ovvia l'esistenza del minimo e del massimo, mentre altrettanto non si può dire per insiemi infiniti come provano i seguenti esempi:

a) l'insieme dei numeri 1, 1/2, 1/3,…, 1/*n*,… (reciproci dei numeri interi) ha il numero 1 come massimo, ma non ha minimo;

b) l'insieme dei numeri 0, 1/2, 2/3,…, *n*/*n*+1,… (rapporti fra ciascun numero intero e quello immediatamente superiore) ha il numero 0 come minimo, ma non ha massimo;

c) l'insieme dei numeri razionali relativi il cui quadrato non supera 2 non ha né massimo né minimo;

d) l'insieme dei numeri interi positivi non ha massimo;

e) l'insieme dei numeri interi negativi non ha minimo;

f) l'insieme di tutti i numeri reali non ha né massimo né minimo.

g) l'insieme di tutti i numeri iperreali non ha né massimo né minimo.

h) l'insieme di tutti gli iperreali infinitesimi non ha né massimo né minimo[4].

I primi tre esempi presentano una caratteristica: infatti anche quando non esiste il massimo (o il minimo) esiste tuttavia un numero non appartenente all'insieme a cui non è superiore (inferiore) alcun numero dell'insieme stesso; si dice allora che l'insieme è **limitato superiormente (inferiormente)**; invece nei casi d), e), f), g), quando non esiste il massimo od il minimo comunque si prenda un numero reale (o iperreale) k vi è sempre qualche elemento dell'insieme superiore (inferiore) a k; si dice in questo caso che l'insieme è **illimitato superiormente (inferiormente)**.

Pertanto sia E un insieme di numeri iperreali limitato superiormente: si definisce come **estremo superiore** di E il numero L (indicato anche con sup(E)) che gode delle due seguenti proprietà:

a) non vi sono elementi di E superiori ad L;

b) qualunque sia l'infinitesimo positivo e esistono sempre elementi di E che verificano la relazione: $L - e < x < L$, cioè $\mathrm{st}(x) = L$.

Analogamente si definisce l'**estremo inferiore**, indicato anche con inf(E).

Una funzione si dice che ha estremo superiore (inferiore), o che è limitata superiormente (inferiormente), quando l'insieme delle immagini (sottoinsieme – proprio o non – del codominio) ammette estremo superiore (inferiore).

Ad esempio la funzione illustrata nella figura 2 è definita in $E = \{x \in \Re \,/\, x \leq b\}$, ammette massimi relativi in $x = M_1$, $x = M_2$, minimi relativi in $x = m_1$, $x = b$, minimo assoluto in $x = m_2$, ed estremo superiore uguale ad L.

Fig. 2

N.B. Ovviamente se una funzione $y = f(x)$ definita in E ammette massimo (minimo) assoluto, allora ammette anche l'estremo superiore (inferiore) che coincide col massimo (minimo).

I.5. MONOTONIA

Si dice **tratto di invariabilità** di $f(x)$ ogni intervallo chiuso $a \leq x \leq b$ (che non si riduca ad un punto) nel quale $f(x)$ si conserva costante. Il diagramma su un tratto di invariabilità è un segmento parallelo all'asse *x*.

Si dice che la funzione $f(x)$ è **crescente** nel punto (infinitamente avvicinabile) se, per ogni infinitesimo positivo *e*, si ha:

; . Vedi fig.3.

Si dice invece che la funzione $f(x)$ è **decrescente** nel punto se, per ogni infinitesimo positivo *e*, si ha:

; . Vedi fig.3.

Una funzione si dice **monotòna** in E (o solo in un intervallo) quando o non è mai crescente (cioè decrescente o costante) o non è mai decrescente (cioè crescente o costante); si dice **strettamente monotòna** se è sempre e solo crescente o sempre e solo decrescente. Si noti che le funzioni strettamente monotòne (e continue, vedi capp. successivi) sono **iniettive**.

Fig. 3

$f(x)$ crescente

$f(x)$ decrescente

I.6. CONCAVITÀ

Sia $f(x)$ una funzione definita in E: si dice che il grafico di $f(x)$ è **concavo verso l'alto** su E quando per ogni coppia di punti x' e x'' appartenenti ad E, con $x' < x''$, il grafico di $f(x)$ nei punti dell'intervallo di estremi x' e x'' sta al di sotto o almeno non sta al di sopra della corda congiungente i due punti $(x', f(x'))$, $(x'', f(x''))$. Vedi figura 4.

Fig. 4

Questa circostanza si presenta quando per ogni $x' \leq x \leq x''$, $x \in$ E, risulta

.

(media ponderata dei valori $f(x')$, $f'(x'')$). Infatti il secondo membro fornisce, per $x' \leq x \leq x''$, l'ordinata q della corda in questione.

Lo stesso discorso può essere ripetuto in modo analogo per la concavità verso il basso.

I.7. FUNZIONE MODULO, FUNZIONI PARI E DISPARI, PERIODICHE

Accanto ad $f(x)$ definita in E si può considerare la funzione . Il diagramma di $y =$ si ottiene da quello di $y = f(x)$ ribaltando al di sopra dell'asse delle ascisse le parti del diagramma di $y = f(x)$ che ne stanno al di sotto: $= f(x)$ per $f(x)$ ³ 0, $= - f(x)$ per $f(x) < 0$. Vedi figura 5.

Fig. 5

Sia $f(x)$ definita in un insieme simmetrico rispetto all'origine degli assi. Per semplicità penseremo $f(x)$ definita in $(-a, a)$ con $a > 0$, eventualmente a infinito positivo.

Una funzione $f(x)$ si dice **funzione pari** quando è $f(-x) = f(x)$ per ogni x dell'intervallo, si dice **funzione dispari** quando è $f(-x) = - f(x)$ per ogni x dell'intervallo. Le funzioni pari hanno il grafico simmetrico rispetto all'asse y, quelle dispari simmetrico rispetto all'origine.

Esempio di funzioni pari: , .

Esempio di funzioni dispari: $y = x$, $y = \text{sen}\, x$.

La somma algebrica di due funzioni pari (dispari) è ancora, dove definita, una funzione pari (dispari).

Il prodotto di due funzioni entrambe pari o entrambe dispari dà una funzione pari, il prodotto di una funzione pari e di una dispari dà una funzione dispari.

N.B. Naturalmente quando si parla di “prodotto, somma, ecc. di funzioni” si intende considerare la funzione che ha come espressione funzionale il prodotto, la somma, ecc. delle espressioni funzionali relative alle suddette funzioni. Ad esempio si abbiano $y = f(x)$ e $y = g(x)$, definite in E; la funzione prodotto sarà $y = f(x)g(x)$.

Sia $f(x)$ definita su tutto l’asse reale (reale o iperreale); supponiamo che esista un numero reale *w* ³ 0 per il quale valga la proprietà "*x*, $f(x) = f(x+w)$: allora *w* si dice **periodo** di $f(x)$. Il minimo *w* tale che valga $f(x) = f(x+w)$ si dice **periodo proprio** di $f(x)$. Se $f(x)$ è periodica di periodo *w*, allora sarà $f(x+k\,w) = f(x)$ per ogni *k* intero.

Può accadere che $f(x)$ non sia definita su tutto l’asse, ma che tuttavia sia definita solo in un insieme E tale che da $x \in$ E segua $(x+w) \in$ E; allora se per ogni $x \in$ E è $f(x+w) = f(x)$, la funzione $f(x)$ si dice *periodica di periodo w*; in questo caso l’insieme E è necessariamente illimitato. Se $f(x)$ e $g(x)$ sono funzioni periodiche di periodo *w*, anche le funzioni $a\,f(x) + b\,g(x)$, $f(x)\times g(x)$, (con *a* e *b* numeri reali) sono funzioni periodiche di periodo *w* laddove, naturalmente, siano definite.

I.8. FUNZIONI INVERSE

Data una funzione $y = f(x)$ definita in un insieme E, sappiamo che ad un valore di x corrisponde uno ed uno solo valore di y, ma, in generale, ad un assegnato valore di y possono corrispondere più controimmagini. Può tuttavia accadere che ogni valore $y = f(x)$ sia immagine di uno ed uno solo valore x di E; ciò accade nelle funzioni iniettive (in particolare considereremo funzioni continue strettamente monotone); allora $f(x)$ pone una corrispondenza uno ad uno, cioè biunivoca, fra l'insieme E e l'insieme $f(\mathrm{E})$ detto anche **coinsieme**. In altre parole $y = f(x)$ è una biiezione fra E ed $f(\mathrm{E})$. La legge che fa passare da un punto y di $f(\mathrm{E})$ al punto x corrispondente (cioè tale che $y = f(x)$) è una funzione $x = g(y)$, definita in $f(\mathrm{E})$, che si dice **funzione inversa** di $f(x)$.

Ad esempio con E = $\{x \in \Re \,/\, x \geq 0\}$ (il radicale inteso in senso aritmetico) ha per funzione inversa , ristretta al dominio corrispondente ($y \geq 0$).

Altro esempio di funzione inversa è il seguente:

sia $y = \ln x$, con x numero reale positivo, si ha, per definizione di logaritmo naturale, la funzione inversa . Analogamente da si ottiene .

I diagrammi cartesiani delle funzioni inverse (dove ha il significato dell'operatore funzionale g usato in precedenza, cioè rappresenta la stessa "legge") si possono dedurre da quelli delle funzioni dirette $y = f(x)$ con una costruzione geometrica molto semplice.

È facile accertarsi che tale costruzione consiste semplicemente nell'eseguire la **simmetria ortogonale rispetto alla retta** $y = x$ (cioè la bisettrice del primo e terzo quadrante), purché – si intende – sia di nuovo indicata con x la variabile indipendente e con y la variabile dipendente (scambio dei due assi cartesiani x, y fra di loro).

La figura 6 cerca di chiarire il concetto.

Fig. 6

I.9. FUNZIONI COMPOSTE

Se $y = f(x)$ è una funzione definita in un insieme E e se $z = g(y)$ è una funzione definita nell'immagine f (E), la nuova funzione

$z = h(x) = g[f(x)]$

è definita in E e la sua immagine h(E) è l'immagine $g[f(E)]$. Essa si dice **funzione composta** (della variabile indipendente x, per tramite della $y = f(x)$). Le due funzioni $g(y)$ ed $f(x)$ si dicono le **componenti** (rispettivamente **prima** e **seconda** componente).

Ad esempio da $y = x^2$, definita per ogni x reale, e da $z = \ln y$, definita per y reale positivo (non nullo) si può ottenere la funzione composta $z = \ln x^2$, definita per ogni x reale non nullo. L'immagine della prima funzione, infatti, è l'insieme di tutti gli y reali non negativi (perciò compreso lo zero). Eliminando lo zero si ottiene proprio il campo di esistenza della seconda funzione.

OSSERVAZIONE. Studiare le funzioni composte è utile al fine di ottenere regole e formule semplici nei riguardi delle derivate (Cap. II). Infatti saper scomporre una funzione nelle sue (eventuali) componenti rende più facile la sua "derivazione". Ad esempio si vedrà che sarà molto agevole pensare alla funzione come funzione composta da e da .

[1] N.B. Alcuni autori distinguono fra "*dominio*" e "*campo di esistenza*", intendendo quest'ultimo come "massimo" dominio. Mentre il dominio può essere "deciso" da chi studia la funzione: è quindi un sottoinsieme del campo di esistenza.

[2] N.B. Se ciò non fosse, cioè se la retta incontrasse il diagramma in più di un punto, significherebbe che la $y = f(x)$ non sarebbe ad un sol valore e quindi nemmeno una funzione, contro l'ipotesi formulata.

[3] N.B. Nella trattazione non si è fatta distinzione fra una funzione, ad es. f, e la sua estensione iperreale f^*, date le loro note proprietà. Ciò avverrà anche in seguito, non essendoci possibilità di equivoco (come spera lo scrivente!).

[4] N.B. Infatti se per assurdo l'insieme degli infinitesimi avesse un minimo, che chiamiamo d, l'infinitesimo d - e (con e infinitesimo positivo), oltre a far parte dell'insieme degli infinitesimi, sarebbe minore del minimo d. Assurdo. Analogamente per il massimo. Si osservi che l'insieme citato non ha nemmeno estremo superiore o inferiore (vedi oltre).

Cap. II – DERIVATA DI UNA FUNZIONE

II.1. PENDENZA DEL GRAFICO DI UNA FUNZIONE IN UN PUNTO. DERIVATA

Consideriamo una funzione reale $y = f(x)$ e un numero reale interno al dominio della funzione. Ovviamente per $x = a$ si ottiene $f(x) = f($ $)$.

Facciamo variare x da ad un numero iperreale $x_0 + \Delta x$ infinitamente vicino, ma non uguale ad . Così facendo, al variare di x (di un infinitesimo Δx) la funzione cambierà di una quantità . Il rapporto

si chiama **rapporto incrementale**. Il numeratore infatti prende il nome di **incremento della funzione** e il denominatore quello di **incremento della variabile indipendente** (in funzione appunto del quale $f(x)$ assume un "nuovo"[1] valore).

Definizione [II.1.1]. S si dice la **pendenza** di $f(x)$ in se

S = st

per ogni infinitesimo non nullo Δx .

NOTA BENE. La pendenza di $f(x)$ in può non esistere per uno dei seguenti quattro motivi:

1) $f($ $)$ non è definito.

2) $f($ $+ \Delta x)$ non è definito per qualche infinitesimo $\Delta x \neq 0$.

3) Il termine ha parti standard diverse per infinitesimi $\Delta x \neq 0$ diversi.

4) Il termine è infinito per qualche infinitesimo $\Delta x \neq 0$.

(in quest'ultimo caso però si potrebbe asserire che il grafico della funzione ha "pendenza

infinita" o che ammette una tangente verticale. Vedasi oltre).

Definizione [II.1.2]. Sia $f(x)$ una funzione reale di una variabile x. Si chiama **derivata (o funzione derivata)** di $f(x)$ la nuova funzione $y' = f'(x)$ il cui valore in x è la pendenza di f in x. In simboli:

, per ogni infinitesimo non nullo Δx,

quando la pendenza esiste.

L'incremento della funzione si denota pure con Δf o con Δy (variabile dipendente da Δx), quindi la derivata, più sinteticamente si può denotare:

.

In figura 7 sono riportati alcuni casi di incrementi Δy con $\Delta x > 0$.

Fig. 7

(a) (b) (c)

$\Delta y > 0$ $\Delta y = 0$ $\Delta y < 0$

OSSERVAZIONE [II.1.1]: In figura gli incrementi sono valori *finiti* (non si può disegnare un infinitesimo!). Sta al lettore immaginarli come fossero visti al microscopio cioè come da metafora al n. 0.2.

Il procedimento per trovare la derivata di una funzione si chiama **derivazione**. Diciamo che *f* è ***derivabile*** in *a* se *f'* (*a*) è definita, cioè se la pendenza di *f* in *a* esiste.

II.2. SIGNIFICATO GEOMETRICO DI DERIVATA

Consideriamo una funzione derivabile in un certo intervallo (*a*, *b*). Il rapporto incrementale , con ∈ (*a*, *b*), rappresenta, come è noto dalla geometria analitica, il coefficiente angolare o pendenza[2] *m* della retta $y = mx + q$ secante il diagramma di *f* (*x*) nei punti A ≡ , B ≡ .

Vedi figure 7 e 8.

Fig. 8

Nella figura 8 si è indicato Δx con h, come spesso, per brevità, si usa.

Se h è infinitesimo, il punto B è infinitamente vicino ad A (questo accade intuitivamente quando il grafico della funzione è una linea non interrotta − come verrà suggerito nel paragrafo riguardante la *continuità* di una funzione − e la retta per AB da secante la curva $y = f(x)$ si "confonde" con la tangente nel punto A).

Pertanto $f'(x_0)$ rappresenta il **coefficiente angolare** della suddetta tangente.

II.3. SIGNIFICATO FISICO DI DERIVATA. LA VELOCITÀ ISTANTANEA DI UN MOBILE

Consideriamo un punto mobile lungo una traiettoria con legge oraria , dove t rappresenta il tempo ed s lo spazio percorso. Vogliamo calcolare la velocità della particella all' istante t_0 .

Per rispondere a questa domanda vediamo cosa succede al punto mobile tra un istante t_0 e un momento "successivo" (o "antecedente") $t_0 + \Delta t$.

Il tempo trascorso è Δt e la distanza percorsa è $\Delta s = f(t_0 + \Delta t) - f(t_0)$. La velocità media sarà

Riferendoci al grafico della legge oraria, se vogliamo calcolare la velocità all'istante t_0 dobbiamo considerare un punto P' ($t_0 + \Delta t$, $s_0 + \Delta s$) infinitamente vicino a P (t_0 , s_0), quindi con Δt e Δs infinitesimi.

Ha senso definire quindi la velocità istantanea come , per ogni Δt infinitesimo, ma si sa che

,

cioè **la velocità istantanea di un punto mobile è la derivata dello spazio rispetto al tempo** (con tutte le ipotesi del caso sulla funzione legge oraria)**.**

II.4. DIFFERENZIALE DI UNA FUNZIONE *y* = *f*(*x*) E SUO SIGNIFICATO GEOMETRICO

Poiché, preso x interno al dominio E, il rapporto incrementale ha come parte standard $f'(x)$ potremo scrivere .

Moltiplicando per h si ottiene .

L'espressione si dice **differenziale** della funzione (nel punto x e con incremento h) e si indica con df:

$df = f'(x)h$. (II.4.1)

Il differenziale della variabile (unica, qui) indipendente x coincide con il suo incremento([3]), pertanto $df = f'(x)dx$, da cui (notazione di Leibniz)

(II.4.2)

che esprime la derivata come rapporto di differenziali, rapporto di due infinitesimi.

Consideriamo la curva di equazione $y = f(x)$ e la tangente nel punto P ≡ e sia Q il punto della curva di coordinate , come in figura 9 (si ricordi l'osservazione [II.1.1]).

Fig. 9

; tg a = m = pendenza retta (PT).

Dalla figura 9 si ha Δy = (nel caso della figura abbiamo a che fare con valori positivi); .

Pertanto , cioè il differenziale $df(x)$ rappresenta l'incremento (positivo, negativo o nullo) subìto dalla y al passaggio da x a $x+h$ calcolato sulla tangente al diagramma anziché sul diagramma stesso.

II.5. DERIVATE E DIFFERENZIALI SUCCESSIVI

Data una funzione $y = f(x)$ definita in un intervallo E ed ivi derivabile, si può calcolare la sua derivata $y' = f'(x)$ ed il suo differenziale dy. In generale la sua derivata, che possiamo indicare con g, sarà una $g(x)$ cioè funzione di x e di conseguenza anche $df = dy = g(x)dx$.

Se $g(x)$ è ancora derivabile, si potrà calcolare $g'(x)$ e $dg(x)$; $g'(x)$ si chiamerà **derivata seconda** di $y = f(x)$ e si indicherà

Il differenziale della g si chiamerà analogamente **differenziale secondo** della y e si indicherà con . Applicando successivamente lo stesso procedimento, quando ciò sia possibile, alla $f(x)$, si ottengono le derivate e i differenziali successivi: primi, secondi, terzi,…, ennesimi.

Esistono naturalmente funzioni infinitamente derivabili.

In generale però, come si potrebbe facilmente verificare, il campo di esistenza della derivata di una funzione è sottoinsieme proprio del campo di esistenza della funzione primitiva. Mai un soprainsieme (sarebbe paradossale che la derivata, "deducibile" da una $f(x)$, esistesse anche dove non fosse definita $f(x)$).

II.6. DERIVATE FONDAMENTALI

Troveremo ora, in base alla definizione, le derivate di alcune funzioni elementari, che è importante tenere a mente (insieme ad altre che vedremo in seguito) per poter speditamente derivare vari tipi di funzioni più complesse.

1) Sia $y = c$, dove c è una costante. Il rapporto incrementale assume la forma

, con h infinitesimo non nullo,

dunque anche la parte standard è zero. Concludendo:

la derivata di una costante è zero. In breve: $D(c) = 0$.

2) Sia $y = x$. Il rapporto incrementale è

,

perciò anche il la parte standard è uguale a 1, cioè $D(x) = 1$. Concludendo:

la derivata della variabile indipendente è uguale a 1.

Ora possiamo provare che il differenziale della variabile indipendente x è uguale a dx (quindi $h = \Delta x = dx$, vedasi II.4).

Sia appunto $f(x) = x$. Da quanto appena appreso troviamo $f'(x) = 1$. Quindi $dx = 1\times h = h$, c.v.d.

3) Sia . Il rapporto incrementale è ;

dunque . Concludendo:

la derivata della funzione *y* = *x*^{2} è la funzione *y* = 2x.

4) Caso generale di “funzione potenza” con $n \in N$, in cui rientra l’esempio (3).

Il rapporto incrementale è (binomio di Newton):

.

Poiché tutti i termini del polinomio ottenuto, tranne il primo, contengono il fattore *h*, passando alla parte standard, si ha: . Cioè:

la derivata della potenza *n*.esima di *x* è uguale ad *n* volte la potenza (*n*-1).esima di *x*.

In breve basta portare a fattore l’esponente e diminuire di un’unità l’esponente della potenza di *x*.

N.B. La suddetta regola vale anche per *n* non intero, ma reale qualunque, come si potrebbe dimostrare. Cioè, ad esempio, la funzione ha come derivata (con $x \neq 0$).

5) Sia con $a > 0$ e $a \neq 1$.

Il rapporto incrementale relativo a questa funzione è

.

Se poniamo , otteniamo .

Si noti ora che, essendo *h* infinitesimo (non nullo), *z* è un infinito. Risulta perciò:

 (numero di Nepero @ 2,718281828. Vedi = 0.3)

In conclusione:

.

Se si pone $a = e$, poiché , si ha , cioè:

la derivata di ln*x* è 1/*x*.

6) Sia $y = \sin x$. Il rapporto incrementale relativo è . Usando le formule di prostaferesi otteniamo.

.

Passando alla parte standard (teorema 1 di 0.2), abbiamo

. Cioè $D(\sin x) = \cos x$. Diremo quindi che:

la derivata di sin*x* è cos*x*.

7) Analogamente si può provare che $D(\cos x) = -\sin x$. Quindi:

la derivata di cos*x* è -sin*x*.

II.7. CONTINUITÀ DI UNA FUNZIONE. DISCONTINUITÀ

Intuitivamente una curva di equazione $y = f(x)$ è continua se descrive una linea "ininterrotta", cioè se ogniqualvolta x_1 è vicino a x_2, $f(x_1)$ è vicino a $f(x_2)$. Matematicamente, in analisi non standard, si può dare questa definizione.

Definizione [II.7.1]. Una funzione $y = f(x)$ è detta **continua** nel punto c se:

1) $f(x)$ è definita in c;

2) ogniqualvolta x è infinitamente vicino a c, $f(x)$ è infinitamente vicino a $f(c)$. Cioè se , per ogni Δx infinitesimo.

Una funzione si dice **continua in un intervallo** se è continua in tutti i punti dell'intervallo.

Fig. 10

(g)

Si consideri la fig. 10, comprendente vari casi: in essi il valore che si intende assunto da *f* (*x*) per è segnato con un punto in grassetto (azzurro).

Nel caso (a) si è voluto rappresentare un punto di continuità per la *f* (*x*). Risulteranno evidenti le seguenti definizioni.

1) La funzione *y* = *f* (*x*) presenta in *c* una **discontinuità di prima specie** quando esistono finiti, ma sono diversi tra loro e per ogni infinitesimo non nullo Δ*x*: la funzione presenta un "salto" finito nel punto di ascissa *c* (vedi casi (c), (d), (e)). Qui non ha influenza il valore di *f* (*c*).

2) La funzione *y* = *f* (*x*) presenta in *c* una **discontinuità di seconda specie** quando almeno una delle due parti standard (sinistra o destra, s'intenda per Δ*x* infinitesimo negativo o positivo), è infinita oppure non esiste. In questo caso si parla pure di discontinuità "essenziale" (vedi ad es. casi (f) e (g)).

3) La funzione *y* = *f* (*x*) presenta in *c* una **discontinuità di terza specie** o **eliminabile** quando esistono finite le due parti standard (sinistra e destra), uguali fra loro, ma il loro valore è diverso da *f* (*c*), cioè , per ogni Δ*x* infinitesimo non nullo (vedi caso (b)).

II.8. CONTINUITÀ DELLE FUNZIONI DERIVABILI

Sussiste il seguente teorema:

Teorema [II.8.1]. Ogni funzione derivabile in un punto è continua in tale punto.

Dim.

Sappiamo che la derivata (o pendenza) di una funzione, in un punto *c*, è data da

per ogni infinitesimo non nullo Δx.

Osserviamo che

a) quando esiste, *m* è unico poiché due reali infinitamente vicini sono uguali;

b) se *f* è derivabile in *c*, è infinitesimo per tutti i Δx infinitesimi.

Quindi è infinitamente vicino a per tutti i Δx infinitesimi. Questo significa che è continua in $x = c$, c.v.d.

Questo teorema non è invertibile, infatti vi sono funzioni che sono continue in un punto, ma non sono in esso derivabili. Così ad esempio la funzione , definita per ogni *x* reale minore o uguale a 5, è continua per $x \leq 5$ (continua da sinistra), ma non ha derivata nel punto $x = 5$. Si noti che la causa della mancanza della derivata per $x = 5$ è duplice (se non vogliamo considerare derivate "sinistre"). Infatti, per prima cosa, in $x = 5$, manca la parte standard destra del rapporto incrementale e poi – seconda cosa – la parte standard sinistra è infinita:

,

dove si è considerato *h* infinitesimo positivo. Per una più immediata comprensione del fatto che la parte standard con *h* negativo del suddetto rapporto incrementale è un numero iperreale infinito, si consideri la derivata della *f* (*x*) che è (vedi avanti al II.12):

, la quale è infinita per (*h* infinitesimo positivo). Si ha un punto a tangente verticale.

OSSERVAZIONE IMPORTANTE. Vi sono casi di funzioni continue in un punto , derivabili nello stesso, ma con derivata discontinua in (!).

Esempio di funzione continua su tutto $\Re$, derivabile su tutto $\Re$, con **derivata discontinua** in $x_0 = 0$.

.

f(*x*) è continua in = 0. Infatti , con *e* infinitesimo non nullo.

Calcoliamo *y'* = *f'*(*x*). Per $x \neq 0$ si ha *y'* = .

Per *x* = 0 si ha: , con *h* infinitesimo non nullo. Quindi:

,

ma , con *e* infinitesimo non nullo, NON ESISTE.

II.9. CONTINUITÀ DI FUNZIONI COMPOSTE

Teorema. [II.9.1]. Abbiamo le due funzioni *g*(*x*) e *f* (*t*). Sia:

$g(x)$ continua in $x = c$, $c \in [a, b]$,

$f(t)$ continua in $t = g(c)$.

(N.B. Si potrebbe supporre $g(x)$ continua in tutto $[a, b]$ e $f(t)$ continua in $[min\ g(x), max\ g(x)]$([4]).

Allora: $f[g(x)]$ è continua in $x = c$.

Cioè, *una funzione continua di una funzione continua è continua*.

Dimostrazione.

Sappiamo che , per ogni Δx infinitesimo, quindi .

Possiamo quindi scrivere , con e infinitesimo.

Avremo: , per la continuità di f , c.v.d.

N.B. Sarà pure . Quindi, sotto le ipotesi del teorema [II.9.1], si può operare uno ***scambio fra* "st" *e* "*f*"**.

OSSERVAZIONE [II.9.1] Lo scambio fra "st" *e* "*f*" si può operare talvolta anche se $g(x)$ non è continua in c. Basta che esista (quindi finito) st e che $f(t)$ sia continua per .

OSSERVAZIONE [II.9.2]. Esistono funzioni discontinue([5]) tali che la loro composizione è una funzione continua.

Esistono ovviamente (ed è più facile trovarne esempi) funzioni discontinue[(12)] tali che la loro composizione è una funzione discontinua.

Un esempio del primo caso è il seguente.

Sia $g(x)$ la funzione di Dirichlet:

con dominio (per noi) E ≡ ℜ, discontinua "dappertutto".

Sia c la funzione "fattoriale": $f(t) = t!$ con $t \in$ N (zero compreso).

Si avrà $f[g(x)] = 1$, "$x \in \Re$ (!!!), funzione continua.

Non si potrà comunque porre: !!! Infatti il primo membro è 1, il secondo non esiste.

Un esempio del secondo caso è il seguente.

Sia $g(x)$ la funzione di Dirichlet. Sia $f(t) = t^2$, $t \in \Re$.

Ovviamente la funzione $f[g(x)]$ è discontinua “dappertutto”. Infatti essa coincide con $g(x)$, in questo esempio. Analogamente per $g[f(x)]$.

II.10. TEOREMI SULLE FUNZIONI CONTINUE

Teorema [II.10.1]. Teorema degli zeri per le funzioni continue.

Sia $f(x)$ continua in I = $[a, b]$ e assuma segni diversi in I, allora esiste almeno un punto $c \in [a, b]$ tale che $f(c) = 0$.

Dimostrazione. Sia ad esempio $f(a) < 0$ e $f(b) > 0$. Suddividiamo I in H intervalli uguali, con H iperintero infinito. L’ampiezza di un singolo intervallino sarà l’infinitesimo (positivo) . Possiamo ipotizzare queste evenienze:

1) non troviamo intervalli in cui la funzione cambia segno;

2) scegliamo un intervallo in cui la funzione cambia segno.

Nel caso 1 ci dovranno essere almeno due intervalli consecutivi, chiamiamoli I_1 e I_2, nel primo dei quali ad es. la funzione è negativa (o almeno non positiva) e nel secondo è positiva (o almeno non negativa). I valori dei due intervallini sono infinitamente vicini (sia fra di loro sia fra quelli di un intervallo e quelli dell’altro), quindi lo sono pure i corrispondenti valori della funzione, essendo essa continua per ipotesi. Sia i_1 un generico elemento di I_1 e i_2 un generico elemento di I_2: sarà $f(i_1) \leq 0 \leq f(i_2)$ ed avremo $\mathrm{st}(f(i_1)) \leq \mathrm{st}(0) = 0 \leq \mathrm{st}(f(i_2))$ per il teorema 3 di 0.2. Concludiamo che $\mathrm{st}(f(i_1)) = \mathrm{st}(f(i_2)) = 0$. Chiamando c la parte reale degli elementi di $I_1 \bigcup I_2$ (certamente esistente per l'assioma 4 del 0.2) si ha la tesi.

Nel caso 2, detto i_1 un valore tale per cui $f(i_1) \leq 0$ ed i_2 un valore tale per cui $f(i_2) \geq 0$, ragionando come sopra, si perviene alla stessa conclusione. Il teorema è quindi dimostrato.

Teorema [II.10.2]. Teorema di Weierstrass.

Sia $f(x)$ è una funzione continua in un insieme chiuso e limitato D (in particolare un intervallo $[a, b]$), essa è ivi dotata di massimo assoluto e di minimo assoluto.

Dimostrazione relativa ad un intervallo $D = [a, b]$.

Osserviamo subito che se $f(x)$ è continua, essa è limitata in tutto D (infatti assume valori di cui esiste la parte standard).

Sia $\sup f(D) = M$, $\inf f(D) = m$. M e m (reali) devono appartenere a $f(D)$ e quindi sono massimo e minimo rispettivamente, infatti:

a) se $M = m$ significa che $f(x)$ è costante;

b) se $M > m$, $f(D)$ possiede infiniti elementi ed M e m sono punti isolati, il teorema è dimostrato (anche se, vedremo, che M ed m non possono essere isolati).

c) se M > *m*, *f*(D) possiede infiniti elementi ed M e *m* (almeno uno fra loro) sono punti infinitamente avvicinabili di *f*(D), considerando tale ad es. M, suddividiamo D in *H* intervalli uguali, con *H* iperintero infinito, come nella dimostrazione del teorema precedente. Esisterà almeno un intervallino I in cui sup*f*(I) = M. Gli elementi di questo intervallino sono infinitamente vicini tra loro ed hanno quindi tutti la stessa parte standard, chiamiamola *c*. Per la continuità di *f* (*x*) consegue che, in I, M, cioè (vedi N.B. della dim. del teorema II.8.1) = M. Il teorema è dimostrato. Analogamente per il minimo *m*.

Teorema [II.10.3].

Una funzione continua in un intervallo chiuso e limitato [*a*, *b*] assume ogni valore compreso fra il suo minimo ed il suo massimo assoluto.

Dimostrazione.

Sia *k* un numero reale qualsiasi compreso tra *m* e M (minimo e massimo assoluto della funzione):

m < *k* < M. Proviamo che esiste almeno un punto di [*a*, *b*] in cui la funzione assume il valore *k*.

Detti e , rispettivamente, due punti di minimo e di massimo assoluto per la *f* (*x*) in [*a*, *b*], si ha

, e supposto, tanto per fissare le idee, > , consideriamo la funzione *continua* . Avremo

, .

Per il teorema [II.10.1] esiste almeno un punto $x \in$ in cui risulta: , ossia , da cui . Con questa conclusione, data l'arbitrarietà di k, numero reale compreso fra m e M, resta dimostrato il teorema.

L'enunciato del suddetto teorema può anche essere quindi:

"I valori che una funzione continua assume in un intervallo chiuso e limitato [a, b] *costituiscono essi pure un intervallo chiuso e limitato"*.

Riassumiamo i due ultimi teoremi in un unico teorema:

Teorema di Bolzano-Weierstrass [II.10.4].

Se la funzione è continua nell'intervallo chiuso e limitato [a, b], allora la funzione assume, in tale intervallo, un valore minimo ed un valore massimo e assume, almeno una volta, tutti i valori compresi tra il minimo e il massimo.

II.11. TEOREMI SUL CALCOLO DELLE DERIVATE

Teorema [II.11.1]. **La derivata della somma di due funzioni (derivabili, ovviamente) è uguale alla somma delle derivate delle funzioni stesse**.

Ciò significa che se

$y = f(x) + g(x)$, con $f(x)$ e $g(x)$ definite in E, è

$y' = f'(x) + g'(x)$, con $f'(x)$ e $g'(x)$ definite in $E' \subseteq E$([6])

Per la dimostrazione si osservi che è (con $\Delta x = h$, infinitesimo non nullo):

= (per il teorema 3 del 0.2) = , c.v.d.

In particolare se $y = f(x) + c$ (c = costante) è $y' = f'(x)$, cioè: una costante additiva viene eliminata.

In modo analogo si dimostra che da $y = f(x) - g(x)$ consegue $y' = f'(x) - g'(x)$ e, più in generale, si ha il

Corollario [II.11.1]. (Teorema II.11.1 generalizzato). **La derivata della somma algebrica di quante si vogliano**([7]) **funzioni è la somma algebrica delle derivate delle funzioni stesse**.

ESEMPI.

1°) Se , si ha .

2°) Se , si ha .

Teorema [II.11.2]. **La derivata del prodotto di due funzioni è uguale al prodotto della prima funzione per la derivata della seconda, aumentato**

del prodotto della seconda funzione per la derivata della prima (o viceversa).

In simboli: $y = f(x)g(x)$ implica $y' = f(x)g'(x) + f'(x)g(x)$.

Infatti, sia $\Delta x \neq 0$ un infinitesimo. Avremo:

,

(Δf e Δg sono infinitesimi per la continuità di f e g). Consideriamo ora il rapporto incrementale

.

Ma Δf è un infinitesimo e è un valore finito, non infinitesimo, poiché esiste g'. Quindi il prodotto Δf è infinitesimo. Avremo:

, c.v.d.

Applicando questo teorema alla funzione $y = cf(x)$, dove c è una costante, si ottiene $y' = cf'(x)$, cioè si ha il

Corollario [II.11.2]. **La derivata del prodotto di una costante per una funzione è uguale al prodotto della costante per la derivata della funzione**.

ESEMPI.

1°) Se , si ha: .

2°) Se si ha:

.

Il teorema [II.11.2] si estende facilmente al caso del prodotto di qualsivoglia (vedi nota 14) numero di funzioni. Per esempio se

, si ha

.

In generale si ha il

Corollario [II.11.3]. La derivata del prodotto di più funzioni è uguale alla somma dei prodotti della derivata di ciascuna funzione per tutte le altre.

ESEMPIO. Se , si ha:

.

Teorema [II.11.3]. La derivata del quoziente di due funzioni (con denominatore non nullo nei punti in cui si calcola la derivata) è uguale

ad una frazione che ha per denominatore il quadrato del denominatore e per numeratore il prodotto del denominatore per la derivata del numeratore diminuito del prodotto del numeratore per la derivata del denominatore.

Cioè, in simboli più chiari e sintetici:

se abbiamo , si trova: .

Infatti, sia $\Delta x \neq 0$ un infinitesimo. Avremo:

,

.

(Δf e Δg sono infinitesimi per la continuità di f e g).

Consideriamo ora il rapporto incrementale

,

quindi, con considerazioni analoghe a quelle del teorema II.10.2, avremo

, c.v.d.

In particolare se $f(x) = 1$ e quindi $f'(x) = 0$, da , si ottiene , cioè si ricava il

Corollario [II.11.4]. La derivata della reciproca di una funzione è uguale ad una frazione avente per denominatore il quadrato del della funzione stessa e per numeratore l'opposto della derivata della funzione data.

ESEMPI:

1°) Se , si ottiene .

2°) Se , si ottiene .

II.12. DERIVATA DI FUNZIONE COMPOSTA

Sappiamo, dal I.9, che le funzioni composte sono funzioni di funzioni, cioè corrispondenze del tipo , dove f e g sono funzioni definite come in I.9.

Sia perciò $y = f(x)$ e dunque $z = g(y)$. Come sappiamo, ad un valore di x corrisponde un valore di y e a questo valore di y corrisponde un valore di z. Vogliamo trovare una regola che ci permetta di calcolare la derivata di z rispetto ad x.

Considerando la derivata come rapporto di differenziali (vedi formula II.4.2), cioè

(notazione, genialissima, dovuta come si è già detto a Leibniz)

, che corrisponde pienamente alla conclusione testè tratta.

Concludendo, si ha l'affermazione seguente.

La derivata di *z* rispetto ad *x* è uguale al prodotto della derivata di *z* rispetto ad *y* per la derivata di *y* rispetto ad *x*.

La regola ora trovata si estende immediatamente al caso più generale in cui la dipendenza di *z* da *x* sia data per tramite di un numero qualunque (vedi nota 13 del II…10) di funzioni intermedie.

Così, se si ha

, , ,

allora *z* è funzione di *x* per tramite di *u* e di *y* e si ha:

.

ESEMPI.

1°) Quale primo esempio vogliamo riportare il caso della funzione relativa all'"osservazione" del I.9 (come là promesso)

Sia dunque: .

La struttura è quella di una in cui è . Più chiaramente, si può pensare a:

 e .

Sappiamo, dalla teoria finora svolta, che sarà:

, cioè e . Dunque sarà:

.

2°) Sia . Sarà pure: .

II.13. DERIVATA DI FUNZIONE INVERSA

Sia una funzione che, nell'intervallo (*a*, *b*) ammette la sua inversa . Per motivi di sintesi e per non far confusione con gli apici, porremo = *F*.

Tenendo ancora presente la notazione , si può ottenere , cioè .

Si ha quindi il

Teorema [II.13.1]. La derivata di una funzione inversa (rispetto ad *x*) è uguale al reciproco della derivata della funzione data (rispetto ad *y*).

Naturalmente il teorema vale per , dove è la funzione inversa di *f* , e ai sensi del I.8.

La validità di questo teorema si può constatare tramite l'osservazione dei grafici della funzione e della sua inversa . Ecco un esempio in figura 11, in cui si è considerato e . Si tenga sempre presente lo scambio tra variabile indipendente e variabile dipendente ai sensi del I.8.

Fig. 11

Coerentemente a quanto detto, qui le due funzioni sono espresse mediante *x* come variabile indipendente e *y* come variabile dipendente (funzione). Infatti solo così si può ottenere la succitata simmetria dei due grafici rispetto alla retta $y = x$ (sennò essi risulterebbero, in opportuni intervalli, coincidenti!).

Si osservi dalla figura 11 che e per la funzione "diretta" *f*, mentre e per la funzione "inversa" *F*. Poiché, per ragioni di simmetria, considerando le opportune corrispondenze, si ha e , segue che i rapporti incrementali delle due funzioni, costruiti a partire da punti in corrispondenza (cioè x_f , → $f(x) = x_F$); x_f = ; $f(x) = x_F$; , ecc.), sono uno l'inverso dell'altro. Infatti:

, c.v.d.

ESEMPI.

1°) Sia data la funzione $y = \sqrt[n]{x}$, la cui inversa è . Si ha

.

In particolare se , si ha .

OSSERVAZIONE. Poiché si può scrivere

, si ha ,

quindi si vede che la regola di derivazione delle potenze con esponente intero, positivo o negativo, vale anche per le potenze con esponente frazionario (si potrebbe dimostrare che la suddetta regola vale per ogni esponente reale).

Così, in particolare, se , si ha .

In generale, perciò, se , si ha , come si può verificare.

2°) Sia e quindi , si ha .

Perciò la funzione ammette se stessa come derivata. Ovviamente ciò succede anche per tutte le sue derivate successive.

Analogamente, se ($a > 0$, $a \neq 1$) e quindi , si ha

.

II.14. DERIVAZIONE LOGARITMICA

In molti casi è utile la seguente regola, per una funzione $f(x)$ che, in un punto x, sia positiva e derivabile.

Posto $y = f(x)$, si avrà: (in x ed anche per tutti i valori vicinissimi a x). Perciò:

e quindi

(II.14.1)

Applicazione. Si voglia derivare la funzione . Per la (II.14.1) si ha:

, da cui

dove si sono applicati i teoremi e le regole di derivazione fin qui imparati.

II.15. PROSPETTO RIASSUNTIVO DELLE PRINCIPALI FUNZIONI CON LE LORO DERIVATE

Funzioni	**Derivate**
$y = x^n$	$y' = nx^{n-1}$
$y =$	$y' =$
$y =$	$y' =$
$y = \text{tg } x$	$y' =$

$y =$ $y' =$

$y =$ $y' =$

$y =$ $y' =$

$y =$ $y' =$

$y =$ $(a > 0, a \neq 1)$ $y' =$ $(a > 0, a \neq 1)$

$y =$ $y' =$

$y =$ $(a > 0, a \neq 1)$ $y' =$ $(a > 0, a \neq 1)$

$y =$ $y' =$

$y =$ $y' =$

$y =$ $y' =$

$y =$ $y' =$

$y =$

NOTA. , infatti è: , con $f(x) > 0$.

II.16. REGOLA DI DE L'HOSPITAL *(o di DE L'HÔPITAL)*

Siano $f(x)$ e $g(x)$ due funzioni continue nell'intervallo (a, b), le quali si annullino entrambe per $x = c$, cioè sia $f(c) = 0$ e $g(c) = 0$. Si vuole ricercare

, con h infinitesimo non nullo,

notando che se si applicasse il criterio della parte standard di un quoziente, si giungerebbe alla forma indeterminata , cioè e .

Ecco la regola (di Guillaume F. de L'Hospital, 1661-1704).

Supporremo che esistano le derivate prime di $f(x)$ e di $g(x)$, che queste siano continue nel punto c e che sia $g'(x) \neq 0$ in tutti i punti di (a, b).

Dimostreremo che risulterà

(II.16.1) ,

cioè, **se esiste la parte standard del rapporto delle loro derivate, esiste pure, ed è uguale, la parte standard del rapporto delle due funzioni**.

OSSERVAZIONE PRELIMINARE. Il teorema suddetto è valido anche con ipotesi più restrittive. Ad esempio è valido anche per parti standard unilaterali (destre o sinistre) e funziona pure se le due funzioni hanno entrambe (o solo quella a denominatore) parti standard infinite. Vale persino senza l'ipotesi di continuità di *g'*(*x*).

Noi lo dimostreremo usando le ipotesi sopra formulate, poiché sarà ben semplice farlo in questa maniera e, d'altro canto, avremo a che fare soprattutto con funzioni che soddisferanno le succitate ipotesi.

Dimostriamo ora la (II.16.1).

Si consideri la "monade" del punto *c* (intorno formato da *c* e da tutti gli iperreali a lui infinitamente vicini: definizione dovuta a Leibniz): i punti di tale intorno si possono indicare, come è ovvio, con $x = c + h$ (*h* infinitesimo).

Poiché, per ipotesi, si ha $f(c) = g(c) = 0$, si ottiene l'identità:

e, passando alla parte standard per *h* infinitesimo, come affermato, si ha

.

Siccome $f'(x)$ e $g'(x)$ sono, per ipotesi, funzioni continue in *c*, si ha ancora:

che è la (II.16.1), c.v.d.

Può avvenire che la parte reale del rapporto (nella monade di *c*) si presenti anch'essa, utilizzando le proprietà di "st", sotto la forma indeterminata , cioè e . In questo caso (se le premesse lo consentono) si applicherà nuovamente la regola di L'Hospital ottenendo quindi:

;

a così via finché si giungerà ad un valore determinato.

Il teorema vale anche per la forma indeterminata , cioè risulti:

e con *H* e *K* iperreali infiniti (vedi definizione 4 e nota 3 del 0.2)

Vediamone una semplice dimostrazione.

Consideriamo allora , il quale si presenterà sotto la forma indeterminata , nel senso di cui sopra.

Supponiamo che le funzioni e soddisfino le ipotesi del teorema. Si noti che, poiché $f(x)$ e $g(x)$ sono infinite per $x \approx c$, e sono infinitesime per $x \approx c$. Si potrà dunque prolungare per continuità le funzioni e nel punto $x = c$ ponendole uguali a zero, cioè alla loro parte standard: sarà così soddisfatta una parte dell'ipotesi suddetta. Si potrà allora scrivere (nella monade di c):

= (per il teorema prima dimostrato)

(per una proprietà della funzione "st")

.

Dal confronto fra il primo e l’ultimo membro dell’uguaglianza (vera, per il teorema, qualunque sia il valore della parte reale, anche infinito!) si ha:

, da cui: , che è quanto si voleva dimostrare, riguardo al teorema di L’Hospital, nel caso della forma indeterminata .

N.B. L’esistenza della parte standard del rapporto delle derivate è essenziale per il teorema (II.16.1). Infatti potrebbe esistere la “st” del rapporto delle funzioni senza che esista la “st” del rapporto delle loro derivate. (Vedi esempio 5° dei seguenti, il quale evidenzia la “non invertibilità” del teorema).

ESEMPI.

1°) Si debba calcolare la “st” per $x = 1+h$ (con h infinitesimo) del rapporto che si presenta sotto la forma 0/. Infatti, per $x \approx 1$, e … Sarà

.

2°) Si voglia calcolare, per $x \approx 0$,

, che però è ancora della forma 0/.

Riapplicando la regola di L’Hospital, si otterrà

.

3°) Sia da calcolare per *x* infinito

, che si presenta sotto la forma ∞/∞, cioè e (K_1 e K_2 infiniti).

Applicando la nostra regola si avrà, con *H* iperreale infinito:

, essendo ovviamente infinitesimo (vedi esempi sulla parte standard in 0.2).

Alla luce del precedente risultato, con ovvie generalizzazioni, si può ricavare la seguente **regola:**

“La “st”, con *x infinito,* di una frazione avente per numeratore e denominatore dei polinomi dello stesso grado è uguale al valore (*finito*) del quoziente dei rispettivi monomi aventi le potenze di grado massimo (della variabile *x*)”.

Nell’esempio sopra proposto i polinomi in questione erano di 2° grado, per cui si è ottenuto:

.

OSSERVAZIONE. **Se il grado del numeratore fosse stato maggiore di quello del denominatore, la frazione avrebbe avuto parte standard infinita (cioè non esistente come numero reale); in caso contrario la parte standard sarebbe stata zero**.

4°) Può accadere di trovare la forma : questa forma la si può ricondurre a 0/ oppure a ∞/∞ e dunque applicare la regola dell’Hospital. Si voglia ad esempio, per $x = 2 + e$, con e infinitesimo positivo:

che si presenta come . Si può scrivere però:

, che si presenta sotto la forma di ∞/∞ e dunque è possibile applicare la regola dell'Hospital (poiché le funzioni che abbiamo soddisfano le condizioni della regola stessa). Si ha perciò

= .

5°) Si consideri . Quando $x = H$ infinito. Si ha la forma di indecisione , ma il teorema di De l'Hospital non è applicabile per calcolare la "st" di .

Infatti e non esiste.

N.B. La non applicabilità della regola suddetta è dovuta, nella fattispecie, anche al fatto che $g'(x) = 1 + \sin x$ si annulla infinite volte per $x > K$ (infinito positivo) e per $x < -K$, contro le ipotesi sperate.

Per calcolare si può operare come segue:

con e e d infinitesimi, oppure, osservando che se x è "molto grande" e positivo,

, tenendo conto del caso (g) del teorema 3 al n. 0.2, si ha

con H infinito positivo.

Si noti che il segno di uguaglianza è dovuto al fatto che nei numeri iperreali esistono gli infiniti.

Ora = 3 e , quindi anche .

Analogamente per *x*, e quindi *H*, negativo.

OSSERVAZIONE. In analisi classica si parlerebbe di utilizzo del ***teorema del confronto***.

II.17. CONDIZIONE SUFFICIENTE DI DERIVABILITÀ IN UN PUNTO

Il teorema di De L'Hospital permette di dimostrare il teorema seguente.

Teorema [II.17.1]. Sia $f(x)$ una funzione continua in un intorno di I di e derivabile in ogni punto dell'intorno stesso escluso al più . Se esiste (quindi finita), per $x\approx$, st($f'(x)$), allora la funzione $f(x)$ è derivabile in e risulta

.

Dim.

Consideriamo le funzioni e . Esse verificano le ipotesi del teorema dell'Hospital. Infatti sono continue in tutto I e sono derivabili in I ad esclusione al più del valore . È pure . Per $x\approx$ avremo

, essendo $f(x)$ continua in (e $\Delta x \neq 0$ infinitesimo).

Ma è pure, per definizione di derivata in un punto,

Inoltre la “st” del rapporto delle derivate

esiste per ipotesi.

Essendo soddisfatte tutte le ipotesi del teorema dell’Hospital, possiamo scrivere

, c.v.d.

OSSERVAZIONE. Nelle ipotesi del teorema [II.17.1], la derivata è pure continua in x_0.

Si noti infine che il teorema esprime una condizione *sufficiente*, ma non necessaria per la derivabilità; infatti se non fossero soddisfatte le ipotesi del teorema, la funzione potrebbe ugualmente essere derivabile nel punto considerato. Vedasi in proposito l’“OSSERVAZIONE IMPORTANTE” del II.8.

II.18. RETTA TANGENTE AD UNA CURVA DI EQUAZIONE $y = f(x)$

Si ricordi che la pendenza (o coefficiente angolare) della tangente geometrica alla curva di equazione $y = f(x)$ è la derivata $f'(x)$ di $f(x)$ (vedi

II.2).

Lasciando indeterminato il valore di x la derivata $f'(x)$ si intende calcolata in un punto generico, ma se si vuole la pendenza della retta tangente in un punto determinato di ascissa si deve sostituire al posto di x nella $f'(x)$, cioè considerare il valore .

Rammentiamo che l'equazione di una retta (non verticale) passante per un punto fisso (fascio "proprio") di coordinate e di coefficiente angolare m è

.

Perciò, se abbiamo la curva di equazione $y = f(x)$, il suo punto P di ascissa avrà come ordinata . La pendenza della tangente in P sarà $m =$. Quindi l'equazione di detta tangente (sempre escluso il caso di retta verticale) sarà:

.

ESEMPIO. Si abbia la curva di equazione e si voglia trovare la retta che le è tangente nel punto di ascissa 1.

L'ordinata di tale punto è $y(1) = 2$ (come si trova con facili calcoli). La pendenza della tangente cercata è $m = y'(1)$.

Calcoliamo: .

Dunque $m = y'(1) = -5$. In definitiva:

$y - 2 = -5(x - 1)$, cioè $y = -5x + 7$, che è l'equazione della tangente cercata.

N.B. Nel caso di tangenti verticali capiterà di notare che la “st” della derivata per $x \approx$ è infinita. Si voglia per esempio trovare la tangente nell’origine degli assi alla curva di equazione . La derivata non esiste per $x = 0$ e la sua parte standard per $x \approx 0$ (cioè x infinitesimo non nullo) è $+\infty$ (con “abuso di linguaggio” ai sensi della definizione 4 del 0.2).

La tangente in O(0, 0), come è palese, esiste, ma è verticale come dimostra la parte standard di y': è l’asse y.

Il punto O è un punto di **flesso verticale** per la curva. Vedi figura 12.

Fig. 12

[1] N.B. Naturalmente potrebbe anche essere . Vedi fig. 7 (b).

[2] N.B. Ecco spiegato il motivo per cui all’inizio del paragrafo si è parlato proprio di “pendenza”.

[3] N.B. Vedi più avanti derivata di $y = x$, par. II.6, caso 2.

[4] N.B. Il *max* e il *min* di $g(x)$ esistono essendo $g(x)$ continua in $[a, b]$: vedi teorema di Weierstrass (II.10.2).

[5] N.B. Si intende: almeno una fra f o g (o altre considerate) sia discontinua (ad es. in $x = c$ …).

[6] N.B. D’ora in poi sottintenderemo verificate queste condizioni per tutte le funzioni considerate, anzi supporremo le suddette funzioni derivabili almeno in tutto un intervallo (aperto, in genere) contenuto in E. I teoremi varranno, dunque, in tutto un intervallo e non solo in un punto.

[7] N.B. Il teorema è dimostrabile anche per **un’infinità** (di addendi) **numerabile** di funzioni.

Cap. III – STUDIO DI FUNZIONE REALE DI VARIABILE REALE

III.1. INTRODUZIONE

“Studiare” una funzione reale di variabile reale (con l’ausilio dei numeri iperreali!) significa determinarne i punti di carattere particolare al fine di tracciarne un diagramma cartesiano che ne mostri l’andamento qualitativo.
Tali punti sono, ad esempio, gli estremi del campo di definizione, i punti estremanti (massimi e minimi relativi e assoluti), punti di flesso [1], ecc.
Essi sono gli estremi di intervalli all’interno dei quali la funzione ha un andamento caratteristico (crescenza, decrescenza, concavità, ecc.) che può essere visualizzato graficamente. Tale visualizzazione rappresenta lo scopo ultimo dello studio di funzione.

III.2. CAMPO DI ESISTENZA

La determinazione del campo di esistenza (o dominio), come si sa (I.1, I.2, I.3), consiste nel determinare l’insieme dei punti $x \in \Re$ per i quali l’espressione analitica della funzione conserva significato ed assume un valore $y \in \Re$. Ecco alcuni esempi.

1) La funzione $y = \frac{x^2+1}{x-1}$ perde significato nel punto $x = 1$ poiché ivi si annullerebbe il denominatore del rapporto che rappresenta la $f(x)$.
In tutti gli altri punti (= numeri) reali la funzione ha un ben preciso [unico] valore. Il campo di esistenza sarà quindi l’insieme:

$$E = \{x \in \Re / x \neq 1\}\text{, cioè } E = (-\infty, 1) \cup (1, +\infty)\ .$$

2) Sia $y = \ln(x-2)$, essa sarà definita per $x > 2$ poiché il logaritmo assume valori reali se il suo argomento è strettamente positivo. Sarà dunque E = $\{x \in \Re / x > 2\}$, cioè E = (2, +∞).

III.3. INTERSEZIONI CON GLI ASSI E SEGNO

È utile, studiando una funzione, determinare gli eventuali punti di intersezione del grafico di $f(x)$ con gli assi coordinati. La determinazione di tali punti ci permette sia di conoscere quantitativamente alcuni valori della funzione (gli zeri ed il punto di coordinate (0, k)), sia di determinare gli intervalli di positività e di negatività della funzione di cui gli zeri sono in generale gli estremi. Per la determinazione degli zeri si risolve il sistema

$$\begin{cases} y = f(x) \\ y = 0 \end{cases}$$

Per la determinazione dell'intersezione con l'asse delle ordinate si risolve il sistema

$$\begin{cases} y = f(x) \\ x = 0 \end{cases}$$

che dà come equazione risolvente $y(0) = f(0) = k$.

ESEMPI.

1) $y = \sqrt{3x-2}$, con E = $\left\{x \in \Re / x \geq \frac{2}{3}\right\}$, ammette per zeri il punto $\left(\frac{2}{3}, 0\right)$; non ha intersezioni reali con l'asse y .

2) $y = x^2 + 10x + 16$, con E = $\{x \in \Re\}$ = $\Re$, ammette per zeri i punti di ascisse x = 2 e x = 8; come intersezione con l'asse y il punto (0, 16).

La funzione di cui all'esempio 1), essendo espressa da una radice quadrata intesa in senso aritmetico, è sempre non negativa, per cui il suo grafico sarà contenuto nel semipiano positivo delle ordinate salvo toccare l'asse delle ascisse nel solo punto $\left(\frac{2}{3},0\right)$.

La funzione di cui all'esempio 2) è positiva per $x < 2 \lor x > 8$, conclusione a cui si può giungere risolvendo la disequazione $x^2+10x+16 > 0$.

III.4. SIMMETRIE E PERIODICITÀ

La determinazione della parità o disparità di una funzione (vedi I.7) permette di limitare lo studio del suo grafico ai soli valori non negativi della *x*, in quanto la restante parte risulta un'immagine speculare rispetto all'asse *y* o, rispettivamente, simmetrica rispetto all'origine.

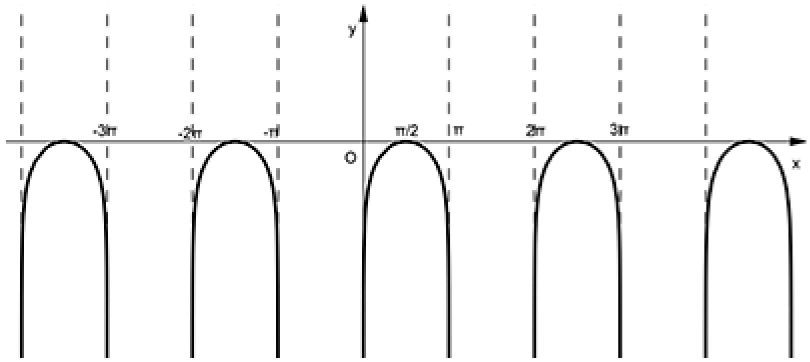
Ad esempio la funzione $y=\sin x$ presenta un grafico simmetrico rispetto all'origine, è cioè una funzione dispari.
La funzione $y=x\sin x$ è una funzione pari e perciò presenta un grafico simmetrico (o speculare) rispetto all'asse *y*.

Spesso la simmetria si presenta rispetto ad una retta parallela all'asse delle ordinate: ad esempio la funzione $y=ax^2+bx+c$ presenta una simmetria speculare rispetto alla retta di equazione $x=-\frac{b}{2a}$: ciò permette di limitare lo studio ai valori $x\geq-\frac{b}{2a}$.

Anche la determinazione dell'eventuale periodicità della funzione permette di limitarne lo studio ad un solo intervallo (di periodicità) dal momento che il grafico si ripete, sia a destra che a sinistra di tale intervallo, in maniera perfettamente identica.

Esempio: la funzione $y=\ln\sin x$ ha periodo 2p, per cui, determinato nel grafico, ad esempio per l'intervallo -p < *x* < p, l'andamento della funzione si ripete in maniera identica sia per $x < -p$ sia per $x > p$. Vedi figura 13.

Fig. 13



III.5. COMPORTAMENTO DELLA FUNZIONE AGLI ESTREMI DEL CAMPO DI ESISTENZA. ASINTOTI

Sia $x = c$ (finito od infinito) il generico estremo del campo di esistenza. Il comportamento della funzione nell'intorno del suddetto punto o meglio, per il nostro approccio non-standard, nei punti infinitamente vicini a c, si deduce calcolando le eventuali "st" destra e sinistra della $f(x)$ per $x \approx c$. Si possono presentare i seguenti casi:

a) c finito.

Sia e infinitesimo positivo:

$\mathrm{st}\big(f(c-\varepsilon)\big)=+\infty$ e $\mathrm{st}\big(f(c+\varepsilon)\big)=-\infty$ o viceversa;

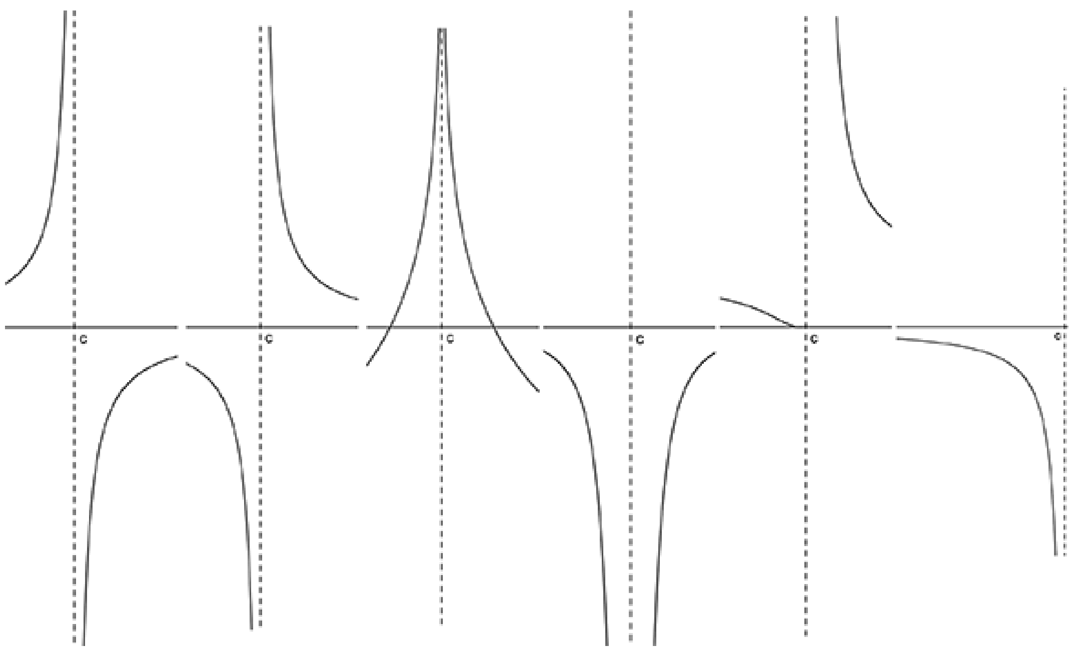
oppure

$\mathrm{st}\big(f(c\pm\varepsilon)\big)=+\infty$ o $\mathrm{st}\big(f(c\pm\varepsilon)\big)=-\infty$

oppure ancora esiste una sola parte standard infinita.

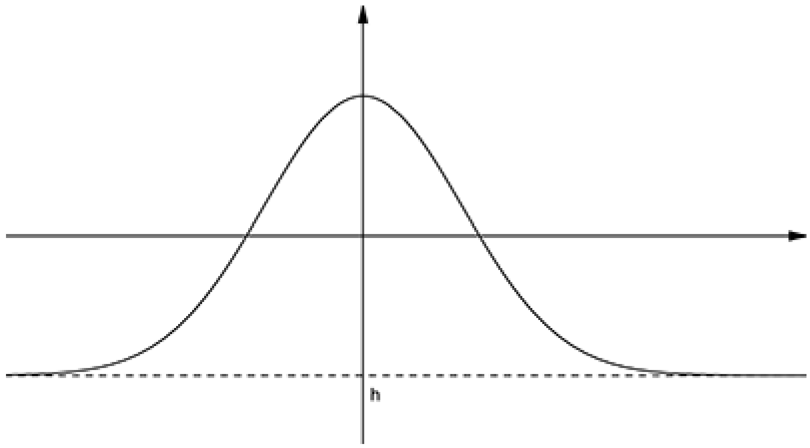
Si dirà che la funzione ammette in *c* un **asintoto verticale** (bilaterale o, rispettivamente, unilaterale) ed il suo diagramma assume, nell'intorno del suddetto punto (= valore, numero), una configurazione simile ad una di quelle in figura 14.

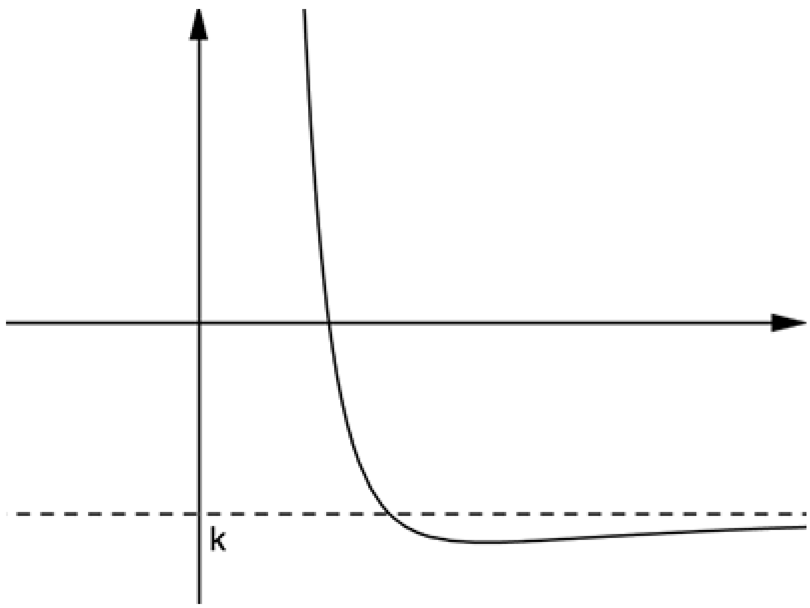
Fig. 14



b) Può capitare il caso in cui, dato H iperreale infinito positivo si abbia $\mathrm{st}\left(f(H)\right)=k$ (con k finito) oppure $\mathrm{st}\left(f(-H)\right)=h$ (con h finito)[2] oppure entrambi i casi (con eventualmente $k = h$). In queste condizioni si dice che la funzione ammette un **asintoto orizzontale** (unilaterale o, rispettivamente, bilaterale), cioè il suo grafico assume una configurazione simile ad una di quelle illustrate in figura 15.

Fig. 15





Da quanto si è detto finora risulta evidente che quando si dice che una funzione ammette un asintoto significa affermare che il suo grafico si avvicina infinitamente all'asintoto stesso (che è una retta) per $x \approx c$ (con c estremo del dominio[3] e suo punto infinitamente avvicinabile).

Ci possiamo chiedere se esiste una retta generica (intendiamo, qui, né orizzontale né verticale) a cui può tendere la curva per $x = \pm H$. Se questo succede la retta si chiama **asintoto obliquo** ed è del tipo $y = mx + q$ con m e q finiti.
Si può osservare che la retta asintoto obliquo (come del resto anche gli altri tipi di asintoti, come si è evidenziato) rappresenta la tangente alla curva

all’infinito.

Per determinare *m* e *q* si può procedere come segue: dovrà essere $\mathrm{st}\left(f(H)-mH-q\right)=0,\quad \forall H$ infinito. Più correttamente si dovrebbero subito distinguere le due “st” per *H* negativo o per *H* positivo, ma qui per brevità mischieremo le due cose (anche perché spessissimo le due “st” coincidono, s’intenda: nelle funzioni più utilizzate comunemente).

Dato $\mathrm{st}\left(f(H)-mH-q\right)=0$, a maggior ragione sarà $\mathrm{st}\left(\frac{f(H)}{H}-m-\frac{q}{H}\right)=0$.

Essendo $\mathrm{st}\left(\frac{q}{H}\right)=0$, affinché esista l’asintoto cercato dovrà esistere finita $\mathrm{st}\left(\frac{f(H)}{H}\right)$.

In questa ultima ipotesi risulta:

$$\mathrm{st}\left(\frac{f(H)}{H}\right)=m$$

Trovato *m*, risulta

$$\mathrm{st}\left(f(H)-mH\right)=q.$$

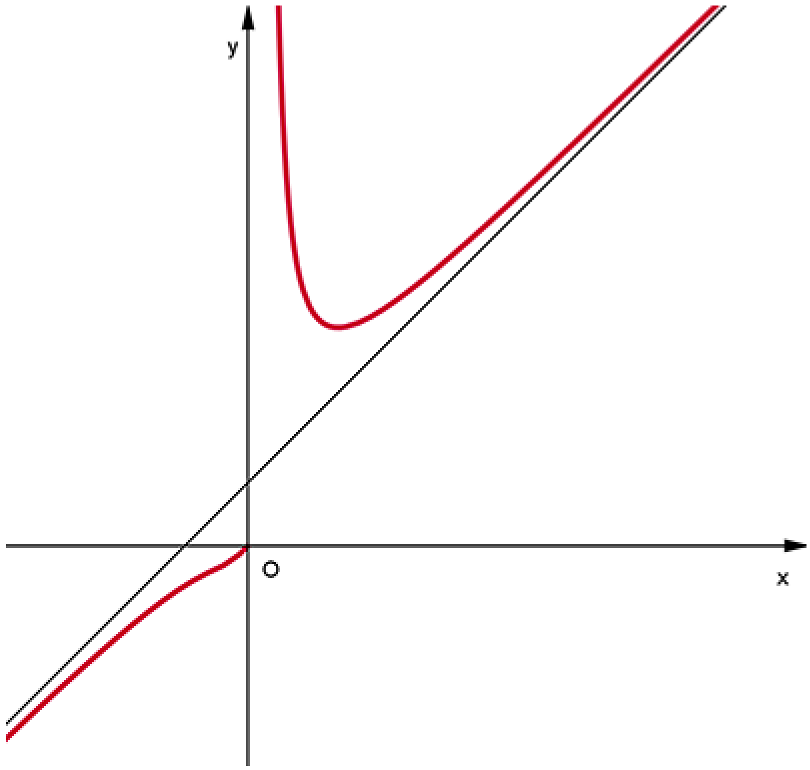
Si noti che, nel caso in cui *m* = 0 si ritrova l’equazione dell’asintoto orizzontale. È dunque evidente che non si potrà parlare unilateralmente e contemporaneamente di asintoto orizzontale ed obliquo: l’esistenza dell’uno esclude quella dell’altro (ripetiamo: per *x* uguale allo “stesso” infinito).

Esempio: la funzione $y=x+e^{\frac{1}{x}}$ ammette per asintoto obliquo (“completo”)

la retta $y = x + 1$, infatti, "*H* infinito (positivo o negativo),

$m=\mathrm{st}\left(H+e^{\frac{1}{H}}\right)=1$ e $q=\mathrm{st}\left(H+e^{\frac{1}{H}}-H\right)=\mathrm{st}\left(e^{\frac{1}{H}}\right)=e^{0}=1$ (vedi fig. 16).

Fig. 16



OSSERVAZIONE III.5.1. Dal fatto che l'asintoto può considerarsi come la retta tangente alla curva nel suo punto all'infinito consegue la possibilità di usare le derivate per trovare tale asintoto. Infatti, se la retta $y = mx + q$ è un asintoto, ricordando il significato geometrico di derivata, si ha:

$$m = \mathrm{st}\left(f'(H)\right);\ q = \mathrm{st}\left(f(H) - mH\right) \text{ (come prima)}$$

Naturalmente sarà necessario, per usare questa regola, che $f(x)$ sia derivabile vicinissima ad ogni H (tranne al più per un'infinità numerabile di punti) e che esista $\mathrm{st}\left(f'(H)\right)$.

ESEMPIO.

Riprendendo il caso visto in precedenza, si può così agire:

$y = x + e^{\frac{1}{x}}$, $y' = 1 + \left(-\frac{1}{x^2}\right)e^{\frac{1}{x}} = 1 - \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}$, da cui ($\forall H$ infinito)

$m = \mathrm{st}\left(y'(H)\right) = 1 - 0 = 1$ e $q = 1$ come visto in precedenza.

OSSERVAZIONE III.5.2. Se la funzione $y = f(x)$ è una funzione razionale fratta, del tipo $\frac{P(x)}{Q(x)}$ dove $P(x)$ è un polinomio di grado $n + 1$ in x e $Q(x)$ è un polinomio di grado n in x; essa può mettersi sotto la forma (eseguendo una semplice divisione fra polinomi):

$$y = mx + q + \frac{R(x)}{Q(x)},$$

dove $R(x)$ è un polinomio di grado minore di n ($R(x)$ è il resto della suddetta divisione); ed è $\mathrm{st}\left(\frac{R(H)}{Q(H)}\right) = 0$.

In tali condizioni la retta $y = mx+ q$ è un asintoto (obliquo) della curva grafico di $y = f(x)$.
Infatti le ordinate dei punti della curva differiscono da quelle dei punti corrispondenti della retta proprio della quantità $\frac{P(x)}{Q(x)}$, infinitesima per x infinito.

ESEMPIO. Si voglia cercare l'asintoto obliquo della funzione $y = \frac{x^3 + 4x^2 - 2}{x^2 + 1}$
.
Essa si può porre nella forma: $y = x + 4 - \frac{x+6}{x^2+1}$, la quale esprime che la retta $y = x + 4$ è un asintoto della curva, poiché le ordinate dei punti della curva si ottengono da quelle della retta $y = x + 4$ aggiungendo ad esse il numero $\frac{-x-6}{x^2+1}$, infinitesima per x infinito.

Questo modo di procedere è dunque il metodo più spedito per ricercare l'eventuale asintoto obliquo avendo a che fare con una funzione razionale fratta.

NOTA. Una funzione razionale fratta ammette asintoto obliquo se il grado del numeratore supera di un'unità il grado del denominatore.

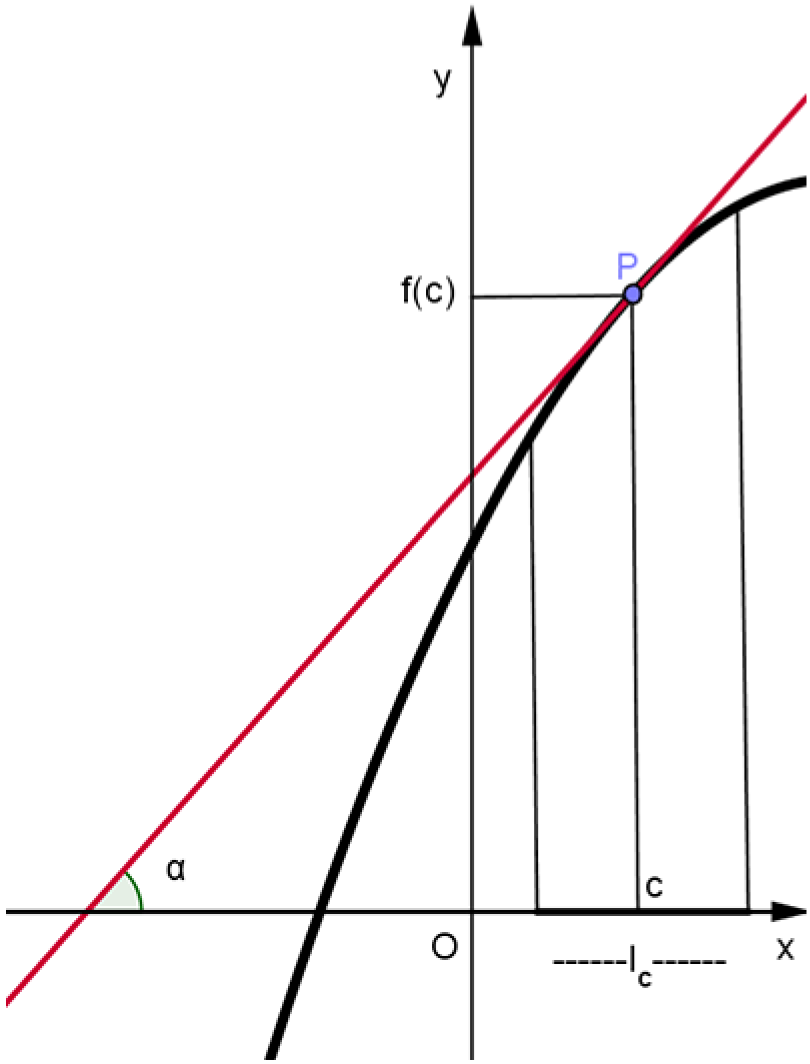
III.6. CRESCENZA, DECRESCENZA, MASSIMI E MINIMI

La derivata prima di una funzione permette di stabilirne la crescenza o la decrescenza. Infatti, data $y = f(x)$, sia c il generico punto del suo insieme di definizione E in cui risulta ad esempio $f'(c) > 0$. Sarà perciò, con h infinitesimo non nullo e $x = c + h$,

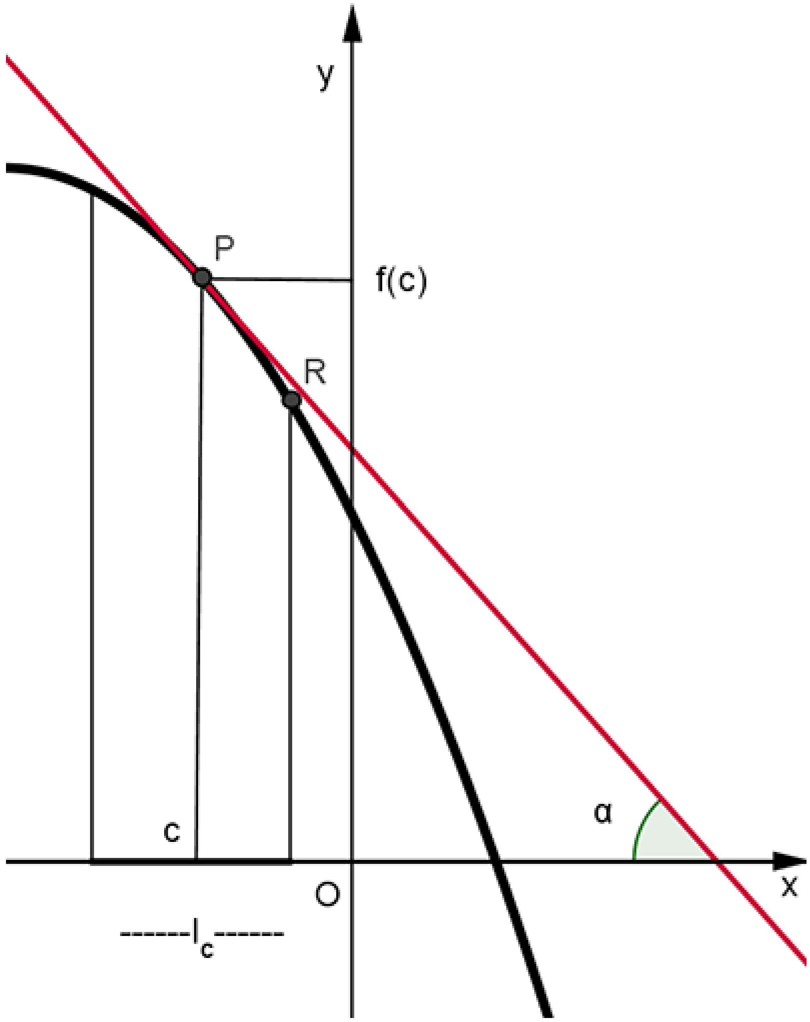
$$\mathrm{st}\left(\frac{f(c+h)-f(c)}{h}\right) > 0 .$$

Questo significa che Δf e h hanno lo stesso per $x \approx c$; ovvero
$f(c+h) > f(c)$ per $h > 0$, $f(c+h) < f(c)$ per $h < 0$, il che equivale a dire che la funzione è crescente per $x \approx c$.
Analogamente viene trattato il caso di $f'(c) < 0$. Possiamo pertanto concludere che se $f'(x) > 0$ segue $f(x)$ crescente, se $f'(x) < 0$ segue $f(x)$ decrescente. Tutto ciò risulta maggiormente evidente se si considera il significato geometrico della derivata prima. Vedi figura 17.

Fig. 17



$m = f'(c) = tg\ a > 0$



m = f'(c) = tg a < 0

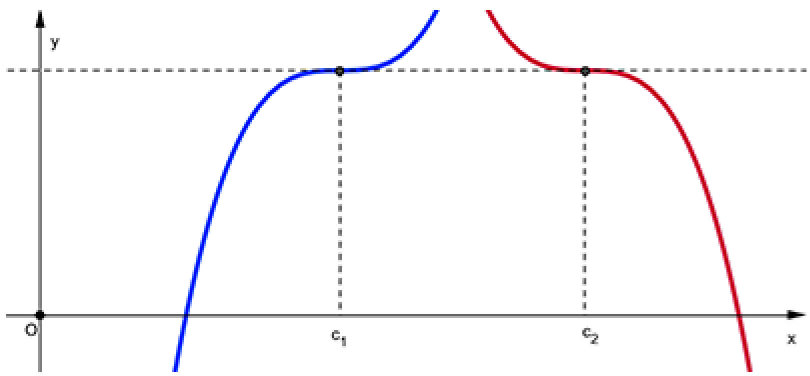
Nulla si è ancora detto per i punti $c \in E$ tali che risulti $f'(c) = 0$. In tali punti risulta tg a = 0, dove tg a è il coefficiente angolare della retta tangente alla curva $y = f(x)$ nel punto di ascissa c.

Pertanto se risulta: $f'(c) = 0$, $f'(c - h) > 0$, $f'(c + h) < 0$, con h infinitesimo positivo, la funzione cresce prima del punto c (valore $x = c$), decresce dopo e nel punto c presenta tangente orizzontale: cioè in c la funzione ammette **massimo relativo**.

Se invece $f'(c) = 0$, $f'(c- h) < 0$, $f'(c + h) > 0$, con h infinitesimo positivo, la funzione ammette in c un **minimo relativo**.

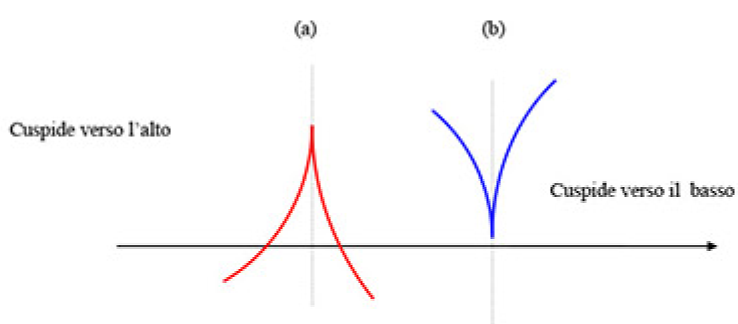
Ancora: se *f'*(*x*) si annulla per *x* = *c* e conserva lo stesso segno in un intorno $(c-\varepsilon, c+\delta)$ (intorno completo o "bilaterale") di *c* (con *e* e *d* infinitesimi positivi) , si dice che la *f* (*x*) ammette in F(*c*, *f*(*c*)) un **flesso a tangente orizzontale** (vedi figura 18 e, nel paragrafo successivo, fig. 22).

Fig. 18



Infine, se è *f'*(*x*) = 0 in *c* ed in ogni punto di un suo intorno infinitesimo, *f*(*x*) è costante in quell'intorno.
NOTA BENE. Non tutti i punti estremanti di una funzione ammettono però tangente orizzontale (*f'*(*c*) = 0): si vedano in proposito i punti di **cuspide** e i **punti angolosi** (i quali ultimi possono anche non essere estremanti). Vedi figg. 19 e 20.

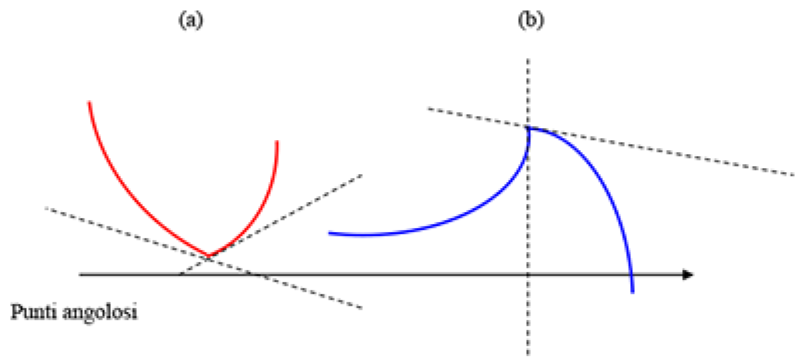
Fig. 19



Qui abbiamo (con ovvio "abuso" di linguaggio), essendo *h* infinitesimo positivo, il caso in cui st $(f'(c-h)=+\infty)$ e st $(f'(c+h)=+\infty)$ cioè un cosiddetto punto di **cuspide** verso l'alto (fig. 19a), e il caso in cui st $(f'(c-h)=-\infty)$ e $(f'(c+h)=-\infty)$ cioè un cosiddetto punto di **cuspide** verso il basso (fig. 19b).

Se le "st" destra e sinistra di *f'*(*x*) sono finite (almeno una lo sia) ma disuguali, il punto A(*c*, *f*(*c*)), si dice **punto angoloso**. Vedi fig. 20.

Fig. 20

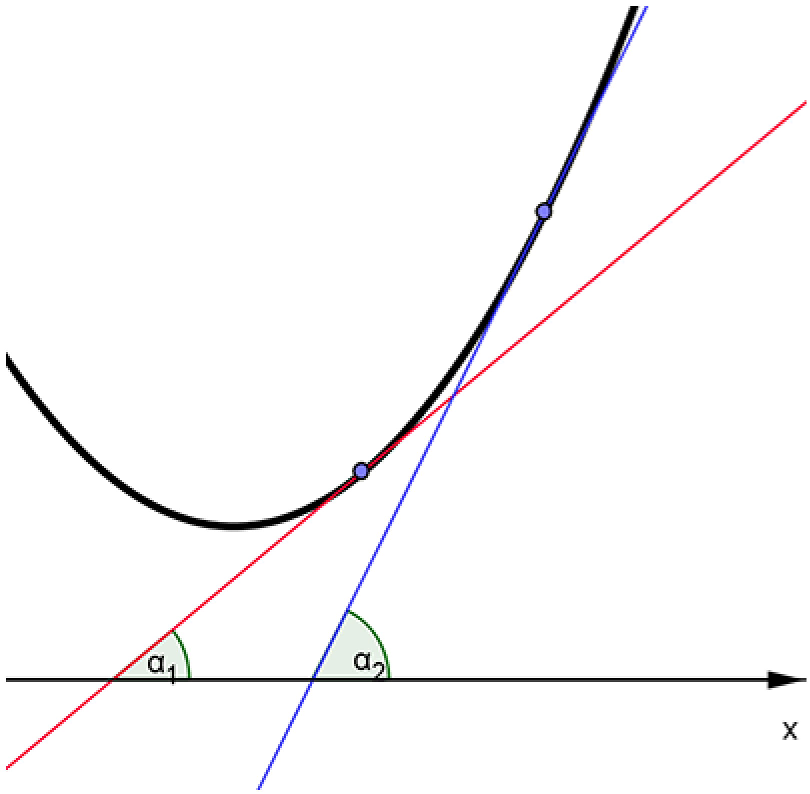


Pertanto per effettuare la ricerca dei massimi e dei minimi non solo occorre esaminare i punti in cui si annulla la derivata prima, ma anche gli eventuali punti in cui non esiste la derivata prima stessa o assume un valore infinito.

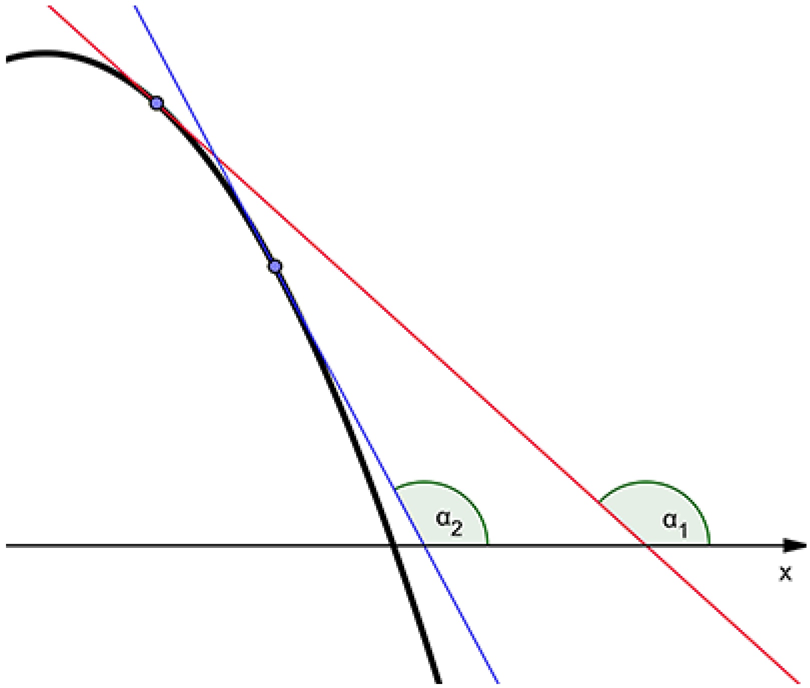
III.7. CONCAVITÀ E FLESSI

La derivata seconda di una funzione permette di stabilirne la concavità. Infatti sappiamo che la derivata prima *f'*(*x*) si interpreta come coefficiente angolare (o pendenza) della tangente alla curva *y* = *f* (*x*), possiamo allora dire che se *f''*(*x*) > 0, *f'*(*x*) cresce, cioè cresce la pendenza della tangente quando si procede nel verso positivo dell'asse delle ascisse. Ciò si verifica quando la concavità della curva è rivolta verso l'alto. Al contrario, se *f''*(*x*) è negativa, allora *f'*(*x*) decresce e ciò esprime che decresce il coefficiente angolare della tangente, il che si verifica quando la concavità della curva è rivolta verso il basso (vedi figura 21).

Fig. 21



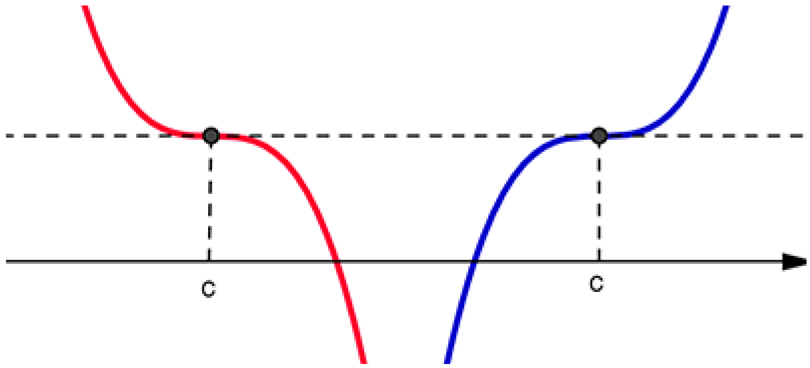
$$x_1 < x_2 \Rightarrow \alpha_1 < \alpha_2$$



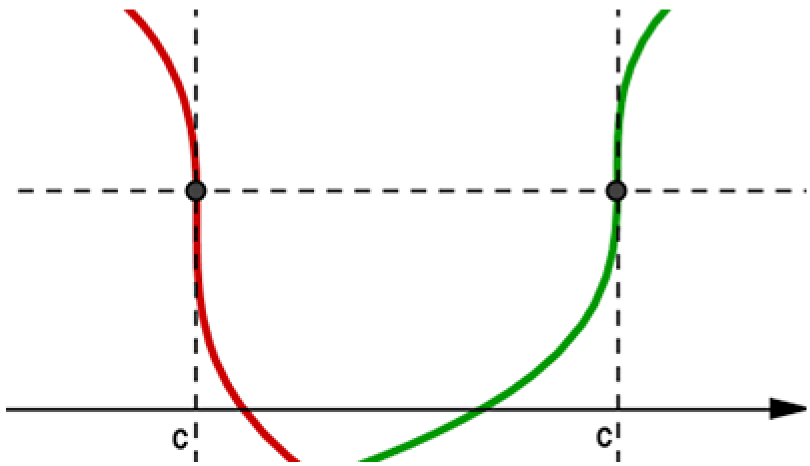
$$x_1 < x_2 \Rightarrow \alpha_1 > \alpha_2$$

Se la derivata seconda si annulla nel punto c appartenente al dominio di f e $f''(c-h) > 0$, $f''(c+h) < 0$ (h infinitesimo positivo), nel punto F(c, $f(c)$) c'è un cambio di concavità e si dice che in F c'è un **flesso discendente** (o **decrescente**). Analogamente se $f''(c) = 0$, $f''(c-h) < 0$, $f''(c+h) > 0$ si ha in F(c, $f(c)$) un **flesso saliente** (o **crescente**).
Nel caso in cui $f''(x)$ si annulla in tutto un intervallo, significa che il grafico $f(x)$ di ha un andamento rettilineo in tale intervallo.
Come si vede dalla figura 22, tre sono i tipi di flesso a seconda della tangente alla curva nel punto del flesso stesso.

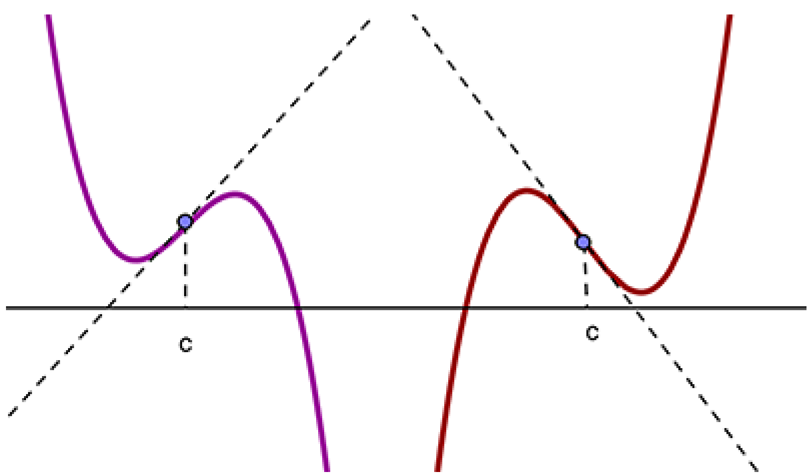
Fig. 22



(a)



(b)



(c)

Nel caso (a) la tangente è orizzontale, quindi accanto alla condizione $f''(c) = 0$ ci sarà anche la condizione $f'(c) = 0$.

Nel caso (b) la tangente è verticale, quindi oltre ad essere *f”*(*c*) = 0, dato *e* infinitesimo non nullo, sarà $\mathrm{st}(f'(c \pm \varepsilon)) = -\infty$ oppure $\mathrm{st}(f'(c \pm \varepsilon)) = +\infty$ rispettivamente (col solito abuso di linguaggio).

Nel caso (c) la tangente è obliqua, quindi avremo *f”*(*c*) = 0 e $\mathrm{st}(f'(c \pm \varepsilon))$ finita e positiva o negativa rispettivamente.

III.8. ESEMPIO DI STUDIO DI FUNZIONE

Sia data la funzione reale di variabile reale: $y = \dfrac{x^2+1}{x-1}$

Studiarla e tracciarne approssimativamente il grafico.

Soluzione.

N.B. *Si consiglia di predisporre un foglio su cui riportare di volta in volta le varie proprietà trovate. Ad ogni passo suggeriremo azioni in questo senso: alla fine il grafico cartesiano della funzione verrà così quasi automaticamente realizzato.*

- Campo di esistenza: E = $\{x \in \Re \,/\, x \neq 1\}$. Oppure E = (-∞, 1) ∪ (1, +∞), con notazione “classica”.

Tracciare la retta verticale $x = 1$ *(“probabile” asintoto verticale)*

- Non si evidenziano periodicità, non ci sono simmetrie rispetto ad origine o ad asse *y* (anche se ce ne saranno, come vedremo, rispetto ad un punto diverso dall’origine).

- Intersezioni con gli assi: $x = 0 \rightarrow y = 1$.

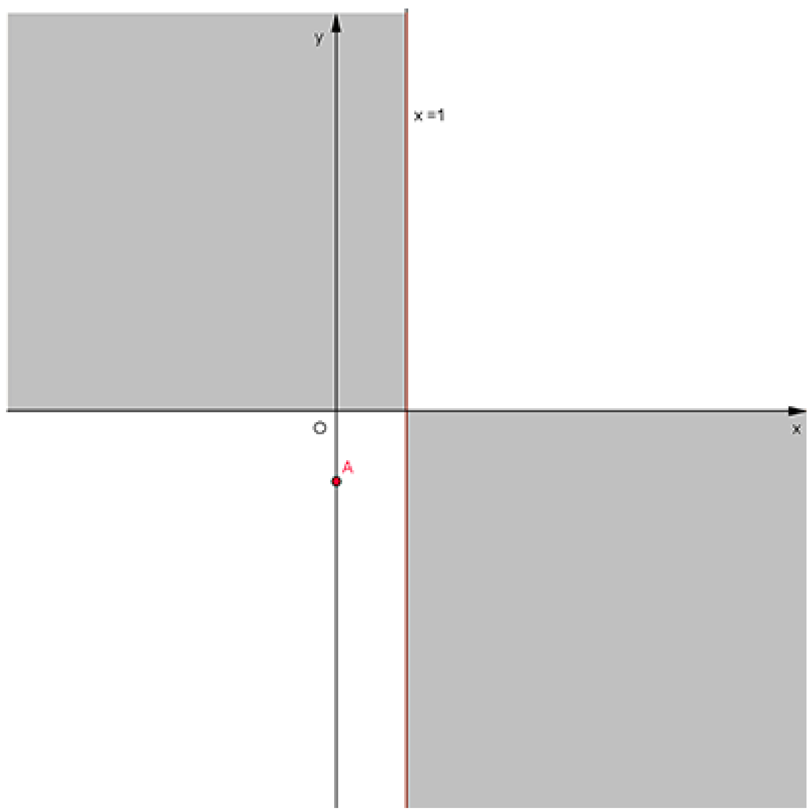
$y = 0 \rightarrow x^2 + 1 = 0$, mai verificato in $\Re$.

Segnare sul grafico il punto A(0,1).

- Segno della funzione: essendo $x^2 + 1 > 0$ sempre in E, la funzione è positiva se $x > 1$, negativa se $x < 1$.

Conviene "cancellare" le parti del piano (pseudo-quadranti) in cui non vi sarà il grafico della curva (vedi figura 23).

Fig. 23



- Asintoti.

Poiché gli estremi di E sono (con ovvia notazione) -∞, +∞, 1, avremo, con *H* infinito positivo:

$\mathrm{st}(f(H)) = \mathrm{st}\left(\frac{H^2+1}{H-1}\right) = +\infty$ e , dunque non vi è alcun asintoto orizzontale. E ancora con *e* infinitesimo positivo:

e
, dunque la retta $x = 1$ è asintoto verticale completo.

Ricerchiamo quindi l'eventuale asintoto obliquo (non essendoci asintoti orizzontali), che dovrà essere del tipo $y = mx+q$, con (sinteticamente):

, , con *H* infinito qualunque.

Il grafico della funzione ammette dunque l'asintoto obliquo (completo) $y = x+1$.

- Derivata prima.

, la quale è positiva o nulla quando lo è il numeratore, essendo il denominatore sempre positivo (in E ovviamente). Dunque *y'* ³ 0 per .
La funzione cresce per , decresce per , ammette un punto di massimo relativo in M , cresce per , ammette un minimo relativo in .

- Derivata seconda.

, la quale non si annulla mai ed è per $x > 1$, per $x < 1$.
Pertanto la funzione (o, meglio, il suo grafico) non ha flessi, è concava verso l'alto per $x > 1$, verso il basso per $x < 1$.

Si può ora passare al disegno del grafico (figura 24):

Fig. 24

Solo ora si può notare (vedi come base i punti M ed N) che il grafico della funzione è simmetrico rispetto al punto P (1, 2) intersezione dei due asintoti. Infatti, traslando gli assi nel punto P, cioè ponendo

, si trova , cioè: che è una funzione dispari.

N.B. La suddetta simmetria si sarebbe potuta individuare rendendosi conto che la nostra curva è una conica: è un’iperbole.

[1] N.B. Vedi oltre III.6 e III.7.

[2] N.B. Si può anche scrivere formalmente così: "H infinito positivo ⇒ $f(\mathrm{H}) \approx k$ e "H infinito negativo ⇒ $f(\mathrm{H}) \approx h$.

[3] N.B. In genere *c* non appartiene al dominio ed è l’estremo di un intervallo sulla retta reale o è punto all’infinito. Vedi esempi.

Cap. IV – TEOREMI SULLE FUNZIONI DERIVABILI

IV.1. ALTRI TEOREMI FONDAMENTALI RELATIVI ALLE FUNZIONI DERIVABILI

Teorema di Rolle [IV.1.1] [Michael Rolle (1652-1719), matematico francese].

Si abbia una funzione continua nell’intervallo chiuso [*a*, *b*], derivabile in (*a*, *b*), cioè nei punti interni, e tale che , cioè assuma valori uguali agli estremi dell’intervallo.

In tali ipotesi esiste almeno un punto *c* interno all’intervallo [*a*, *b*] nel quale la derivata della funzione si annulla; risulta cioè: .

Dimostrazione. Sinteticamente, con ovvia simbologia, tenendo conto del teorema [II.9.2] (di Weierstrass), si può scrivere:

1° caso: m = M ⇒ costante in [*a*, *b*] ⇒ si ha la tesi.

2° caso: m < M ⇒ almeno uno fra *c* e *d* cade in (*a*, *b*), poiché per ipotesi . Sia ad es. il punto *c*.

Prendiamo *h* infinitesimo non nullo; avremo *c* + *h* ∈ (*a*, *b*). Quindi sia per $h < 0$ sia per $h > 0$, cioè . Dividendo per h:

- per $h > 0$:
- per $h < 0$: . Passando alla "st":

, c.v.d. Vedi figura 25 (nella quale è contemplato il caso in cui vi sono tre punti che soddisfano il teorema).

Fig. 25

Teorema di Lagrange [IV.1.2] [Giuseppe Luigi Lagrange (1756-1818), matematico italiano] o **"teorema della media del calcolo differenziale"**

Si abbia una funzione continua nell'intervallo chiuso [*a*, *b*], derivabile in (*a*, *b*), cioè nei punti interni, cioè assuma valori uguali agli estremi dell'intervallo.

In tali ipotesi esiste almeno un punto *c* interno all'intervallo [*a*, *b*] nel quale risulta .

Dimostrazione (formale e **s**intetica).

Consideriamo la funzione , con $k \in \Re$.

Vogliamo che sia . Dovremo porre all'uopo: , da cui

$\Rightarrow$ $\Rightarrow$.

Otteniamo . Per il teorema di Rolle, applicato alla , la quale ne soddisfa l’ipotesi, si può affermare: .

Poiché si ha , abbiamo le seguenti implicazioni:

, c.v.d.

Vedi figura 26 (nella quale è contemplato il caso in cui vi sono due punti che soddisfano il teorema).

Si noti che trovare il punto *c* equivale a trovare una tangente (o meglio il suo coefficiente angolare o pendenza) alla curva, grafico di , parallela alla retta congiungente i punti estremi del grafico e .

Fig. 26

Corollario 1, al teorema di Lagrange.

Se una funzione è continua in [*a*, *b*], derivabile in (*a*, *b*) e ammette derivata nulla in tutto (*a*, *b*), allora tale funzione è *costante* in [*a*, *b*].

Dim. (sintetica).

, . Da cui

 = costante, c.v.d.

Corollario 2, al teorema di Lagrange.

Se e sono due funzioni reali continue in [*a*, *b*], derivabili in (*a*, *b*), che ammettono uguale derivata in ogni punto di (*a*, *b*), allora queste funzioni differiscono per una costante.

Dim. (sintetica).

Poniamo . Avremo ⇒ = costante. Quindi

 = costante, c.v.d.

Corollario 3, al teorema di Lagrange (Vedi IV.6, in cui già si è trattato questo argomento).

Se una funzione è continua in [*a*, *b*], derivabile in (*a*, *b*) con , allora è *strettamente crescente* in [*a*, *b*]. Se invece , la suddetta funzione è *strettamente decrescente* in [*a*, *b*].

Dim. (sintetica).

Sia .

Per il teorema di Lagrange: .

Da qui supponendo deduciamo . Ciò prova che la funzione è crescente in [*a*, *b*], c.v.d.

Analogamente si ragiona nel caso in cui . Risulterà decrescente in [*a*, *b*].

Teorema di Cauchy [IV.1.3] [Agostino Cauchy (1789-1857), matematico francese] o **“teorema degli incrementi finiti”.**

Se e sono due funzioni continue in [*a*, *b*], derivabili in (*a*, *b*) e se la derivata non si annulla mai in (*a*, *b*), allora esiste almeno un punto $c \in (a, b)$ tale che valga la relazione:

.

Dim. (sintetica).

Consideriamo la funzione , con $k \in \Re$. Determiniamo *k* tale che , cioè:

, , da cui (*)

Per il teorema di Rolle:

 ⇒ ⇒ (**)

Confrontando (*) con (**) segue che

, c.v.d.

Teorema [IV.1.4]. Formula di Taylor col termine complementare nella forma di Lagrange.

Sia una funzione definita nell'intervallo *I* (limitato o no), ivi derivabile *n* volte, e sia un punto di *I*. In tali ipotesi, per ogni esiste almeno un punto x (generalmente dipendente da *x*) interno all'intervallo di estremi *x* e tale che:

.

Dimostrazione.

Notiamo subito che per *n* = 1 si ha il caso particolare del teorema di Lagrange:

.

Supponiamo, per semplicità e per fissare le idee, che sia *x* > ed *n* = 3, ma risulterà evidente che la dimostrazione sarà valida, in modo analogo, per qualunque *n* ³ 1.

Si tratta dunque di dimostrare che

,

dove x è un conveniente punto dell'intervallo (, *x*).

Sostituiamo nella formula da verificare, al posto di , una lettera *H*, per cui otteniamo

Ci proponiamo quindi di dimostrare che *esiste un punto* x *interno ad tale che* .

Abbiamo: .

Sostituiamolo nel 2° membro della formula da verificare, poi scriviamo in tale secondo membro una *variabile ausiliaria X* al posto di . Con questi passaggi il suddetto secondo membro diviene una *funzione ausiliaria*

.

Essa (mantenendo *H* costante) gode delle seguenti proprietà:

1°) *F*(*X*) esiste ed è continua in [, *x*].

2°) , come si può ben controllare.

3°) *F*(*X*) è derivabile in tutto (, *x*). Si trova infatti:

,

.

La *F*(*X*) soddisfa dunque l'ipotesi del teorema di Rolle, relativamente all'intervallo [, *x*]. Esisterà pertanto un punto x tale che

 < x < *x*, .

Essendo , otteniamo = 0, cioè , c.v.d.

Analogamente si ragiona nell'ipotesi *x* < .

La formula di Taylor prende il nome di **Formula di Mac Laurin** nel caso particolare = 0.

Eccola:

ESEMPIO.

Scrivere la formula di Mac-Laurin di ordine 3 (cioè composta dai primi 4 termini col “resto” – qui di Lagrange – di quarto grado) della funzione .

Occorre conoscere il valore di $f(x)$ e delle sue prime tre derivate nel punto $x = 0$ e, per scrivere il termine complementare (quello contenente x), è necessaria un’espressione della derivata quarta di $f(x)$. Si ha:

Risulta perciò: .

Cap. V – INTEGRALI DELLE FUNZIONI REALI DI UNA VARIABILE REALE

V.I. *UN PO' DI STORIA*: DAL PROBLEMA DELLE AREE AL CALCOLO INTEGRALE

Il calcolo integrale risale agli antichi Greci. Eudosso di Cnido, vissuto nel 300 a.C., aveva ideato un metodo per determinare l' **area di una figura piana a contorno curvilineo**: il metodo consisteva nel "riempirla" con poligoni sempre più "fitti" fino a ricoprirla completamente, ad "esaurirla" (metodo detto poi di esaustione).

Tanto Euclide (300 a.C.) quanto Archimede (200 a.C.) fecero largo uso del metodo di esaustione allo scopo di determinare l'area di figure piane ed il volume di figure solide. Per dare maggiore generalità a queste costruzioni (i poligoni con cui si ricopriva una zona a contorno curvilineo cambiavano di volta in volta) Archimede inventò un altro metodo, basato su un'idea semplice: si pensa la figura formata da un certo numero di fili pesanti, paralleli fra loro, e dunque con un certo peso complessivo.

Si può allora confrontare il peso di questa figura con quello di un'altra figura di area nota, formata anch'essa da un certo numero di quei fili, sospendendo le due figure ai bracci di una leva. Poi, dall'esperimento fisico, Archimede passò alla matematica, idealizzando i fili pesanti con delle sottilissime strisce rettangolari. In questo modo, descritto nell'opera "Il metodo" (manoscritto ritrovato nel 1906 in una biblioteca di Costantinopoli) Archimede precorre di molti secoli i procedimenti che, nel 1600, costituirono le basi del calcolo integrale.

Le idee espresse ne "Il metodo" si ritrovano nei lavori degli studiosi della scuola di Galileo: Cavalieri (1598-1647) e Torricelli (1606-1647).

Cavalieri pensa ad un’area composta da fili “indivisibili”, perché non possono essere ulteriormente assottigliati; l’area del rettangolo, per esempio, è riempita di fili paralleli alla base, lungo tutta l’altezza. Se questi fili vengono spostati, in modo che siano sempre paralleli fra loro, si formeranno altre figure (fig. 27).

Fig. 27

Queste nuove figure saranno tutte equivalenti al rettangolo perché è “come se fossero costituite dalla stessa quantità di materiale”.

Il metodo degli indivisibili è molto vicino a quello di Archimede.

Durante il rapido sviluppo del calcolo integrale (di cui ci occuperemo in paragrafi successivi) , gli indivisibili di Cavalieri e di Torricelli perdono a poco a poco la loro natura di fili materiali, sottilissimi sì, ma divisibili, per assottigliarsi sempre più in una suggestiva visione dinamica (si pensi ad es. all’integrazione numerica con il metodo dei rettangoli[1]).

Nel XVII secolo si sviluppano, in modo indipendente, le indagini su due tipi di problemi, apparentemente molto lontani tra loro:

• il calcolo delle aree di figure a contorno curvilineo[2]

• e la ricerca di una funzione di cui é data la derivata[3].

Torricelli e, poco più tardi Barrow (1630-1677), riconobbero che la soluzione dei due problemi era basata sullo stesso procedimento. Questa scoperta ha stabilito un formidabile collegamento fra due correnti di indagini rimaste per secoli separate e ha fornito un impulso notevolissimo allo sviluppo di un nuovo ramo dell'analisi: il calcolo integrale.

Newton (1642-1727) e Leibniz (1646-1716) hanno dato i contributi più innovativi al calcolo integrale, che ha continuato a svilupparsi nel XIX secolo, fino a ricevere una sistemazione rigorosa soprattutto da parte di Cauchy (1798-1857) e Riemann (1826-1866).

V.2. AREA DEL CERCHIO

Un valore approssimato per difetto dell'area del cerchio si ottiene calcolando l'area di un poligono regolare in esso inscritto e si capisce che, all'aumentare del numero dei lati del poligono, l'area aumenta e tende a quella del cerchio (vedi figura 28).

Fig. 28

L'area di un poligono regolare è data da A = , con *p* = perimetro, *a* = apotema.

All'aumentare del numero dei lati del poligono regolare, accade che:

• il perimetro tende alla lunghezza della circonferenza;

• l' apotema tende al raggio *r* del cerchio,

quindi:

A =

(essendo π: il rapporto fra la circonferenza e il diametro del cerchio).

V.3. INTEGRALE DEFINITO

Consideriamo una funzione *f* (*x*), 3continua in un intervallo I = . Supponiamo inizialmente che la funzione sia positiva in I. Vogliamo calcolare l'**area** della regione di piano delimitata dal grafico della funzione, dalle rette $x = a$, $x = b$ e dall'asse *x*. Tale regione è detta *area sottesa dal grafico di f* (*x*) *nell'intervallo* I ed è un *quadrilatero mistilineo* chiamato anche *trapezoide*. Vedi figura 29 (il trapezoide è ABNM).

Fig. 29

Suddividiamo l'intervallo, la cui ampiezza è $b - a$, in *n* parti uguali[4], ciascuna delle quali avrà quindi ampiezza

.

Gli estremi dell'intervallo sono . Consideriamo ora la seguente somma (*somma di Riemann)*:

o, più sinteticamente

.

Nella figura 30 viene evidenziata l'interpretazione geometrica di S_n (ogni addendo di questa somma rappresenta l'area di un rettangolino…).

Fig. 30

La suddetta somma si può considerare un'approssimazione dell'area del trapezoide in figura.

Poiché $S_n = S(\Delta x)$ è definito per ogni $\Delta x > 0$, per l'assioma di soluzione (**Assioma 6** degli assiomi sui numeri iperrali del 0.2), $S(dx)$ è definito per ogni iperreale $dx > 0$.

Se $dx > 0$ è infinitesimo, allora

$S(dx) =$

Viene detta *somma di Riemann infinita*.

Teorema [V.3.1]. Se $f(x)$ è una funzione continua in un intervallo I = , allora la somma di Riemann infinita è un numero iperreale finito.

Dim.

Siano *m* e M il minimo ed il massimo di *f* in [*a* , *b*], certamente esistenti per il teorema di Weierstrass. Sia poi > 0. Avremo:

.

Quindi per l'assioma di soluzione

.

Pertanto la somma di Riemann è un numero iperreale finito, c.v.d.

Ora siamo pronti per definire il concetto centrale di questa trattazione, l'**integrale definito**. Si ricordi che la derivata era definita come la parte standard del quoziente $\Delta y/\Delta x$ ed era stata denotata *dy/dx*. L' "integrale definito" sarà definito come la parte standard della somma di Riemann infinita

,

e si scriverà . Quindi Δx si muta in *dx* in analogia con la nostra notazione differenziale. ∑ si muta in una S lunga e sottile, , per ricordarci che l'integrale si ottiene da una somma infinita. Diamo una definizione precisa.

Definizione [V.3.1]. Sia *f* (*x*) una funzione continua in un intervallo I = , Sia *dx* un infinitesimo positivo. Allora l'**integrale definito** di *f* da *a* a *b* rispetto a *dx* è la parte standard della somma di Riemann infinita rispetto a *dx*, in simboli

In base a questa definizione per ogni infinitesimo positivo *dx* l'integrale definito

è una funzione reale di due variabili definita per tutte le coppie (*u* , *w*) di elementi di I. Il simbolo *x* è una variabile apparente in quanto il valore di

non dipende da *x*.

Osservazione [V.3.1]. I si chiama *intervallo di integrazione* e i suoi estremi *estremi di integrazione* (*a: primo estremo* o *estremo inferiore*, *b: secondo estremo* o *estremo superiore*). Il prodotto *f* (*x*)*dx* è l'*integrando*, la *f* (*x*) è la *funzione integranda* (cioè che deve essere integrata) , la *x* è la *variabile di integrazione*: questa lettera può essere sostituita da una qualunque altra, perché, per ogni infinitesimo positivo *dx*, l'integrale definito di una funzione è un numero che *non* dipende, come è evidente, dal nome che si dà alla variabile da cui dipende la funzione integranda, ma solo dagli estremi di integrazione; si ha così:

.

Se la funzione *f* (*x*) assume valori negativi in tutto l'intervallo I considerato, l'integrale (quindi l'area fra il grafico di *f* (*x*) e l'asse *x* per $x \in$ I) dà un valore negativo.

Se *f* (*x*) assume valori di segno diverso, si suddividerà I in sottointervalli in cui la funzione ha segno costante e l'integrale avrà un valore uguale alla somma algebrica delle aree calcolate nei suddetti sottointervalli.

Affinché si possa parlare di integrale definito di una *f* (*x*), in generale basta che essa sia *limitata* (con alcune ulteriori ipotesi che non ne implicano però la continuità) nell'intervallo di integrazione. Vedremo che si potrà parlare di integrazione (integrali "impropri") anche in casi speciali in cui l'intervallo di integrazione è illimitato oppure *f* (*x*) è infinita per *x* vicinissima a qualche valore dell'intervallo stesso.

V.4. PROPRIETÀ DELL' INTEGRALE DEFINITO

Si pone per *definizione* (o meglio *convenzione*):

a) e b) .

c) **Proprietà additiva** (o relazione di *Chasles*): se *f*(*x*) è continua in e se *c* è un punto interno ad , risulta:

 (senza dim.)

d) **Proprietà distributiva**:

(senza dim.)

e) Se *K* è una costante, si ha:

(senza dim.)

f) La d) e la e) possono così esprimersi sinteticamente.

, con *H* e *K* costanti.

Teorema della media [V.4.1].

Se la funzione $f(x)$ è continua nell'intervallo I = , allora esiste almeno un punto *c* di I, tale che

o, in forma equivalente (ovviamente con $a < b$).

Dimostrazione.

Siano *m* ed *M* il minimo ed il massimo della $f(x)$ in I. Avremo (vedi fig. 31):

Fig. 31

Esiste dunque un certo numero μ compreso fra m ed M ($m \leq \mu \leq M$) tale che

Essendo $f(x)$ continua nell'intervallo , per il teorema [II.9.3], esiste almeno un punto c di in cui risulta . Si ha quindi , che è la tesi.

Osservazione [V.4.1]. Prescindendo dalla continuità o meno della $f(x)$, se in tutto , si deduce la limitazione .

V.5. FUNZIONI D'AREA. FUNZIONI INTEGRALI

Consideriamo una $f(x)$ integrabile in , quindi anche in ogni intervallo con . La funzione così definita è funzione dell’estremo superiore x d’integrazione. Essa viene chiamata una ***“funzione integrale”***.

Il suo significato geometrico è quello di rappresentare un’area variabile, come in figura 32 (in cui si considera $f(x)$ continua).

Fig. 32

Utilizzando la relazione di Chasles (proprietà additiva, V.4.c) si può generalizzare la definizione di funzione integrale :

.

Si hanno così infinite funzioni integrali (una per ciascun) e queste differiscono l’una dall’altra per una costante additiva. Infatti se è un altro punto qualunque di , risulta:

,

dove appunto il primo termine del secondo membro è costante.

Teorema [V.5.1].

Se la funzione $f(x)$ è integrabile in , ogni sua funzione integrale (con) è continua in tutto .

Dimostrazione.

Evidentemente $F(x)$ è definita in tutto . È pure . Diamo ora un incremento infinitesimo arbitrario Δx alla variabile x in modo che sia ancora . Troviamo:

, da cui .

Supponendo che in sia (M positivo), si ha (osservazione V.4.1) e quindi

, (anche per).

Ciò prova che

, ,

cioè che $F(x)$ è continua in tutto , c.v.d.

Teorema fondamentale del calcolo integrale (di Torricelli-Barrow) [V.5.2].

Se $f(x)$ è integrabile in I = ed ivi continua, ogni funzione integrale della $f(x)$ in è ivi derivabile ed ha per derivata .

Dimostrazione.

Consideriamo e diamogli un incremento infinitesimo (non nullo) Δx in modo che $(x + \Delta x) \in$.

Costruiamo il rapporto incrementale

,

dove *c*, per il teorema della media (e dell'assioma di soluzione), è un conveniente valore dell'intervallo .

Tenendo presente che *x* è fissato ed è , si deduce che .

Otteniamo quindi

.

L'esistenza della "st" del rapporto incrementale dimostra che *F*(*x*) è derivabile e risulta inoltre

$F'(x) = f(x)$, c.v.d.

Teorema [V.5.3]. Se *F*(*x*) e *G*(*x*) sono due funzioni integrali di *f*(*x*), allora esse differiscono per una costante.

Dimostrazione.

Siano e due funzioni integrali di *f*(*x*) in un certo intervallo (contenente). Sarà: (costante), quindi

, c.v.d.

Definizione [V.5.1] di funzione *primitiva*.

Una funzione $F(x)$ si dice che è una **primitiva** della funzione $f(x)$, nell'intervallo I = considerato, se $F(x)$ è derivabile in ogni punto di I ed ivi risulta:

.

Osservazione [V.5.1]. Se $F(x)$ è una primitiva di $f(x)$, anche $F(x)$ + C (C costante arbitraria) lo è.

Anzi, si può affermare che se $F(x)$ è una primitiva di $f(x)$, tutte e sole le primitive sono date dalla formula $F(x)$ + C, come è facile dimostrare.

Formula fondamentale del calcolo integrale.

Se $f(x)$ è integrabile in I = ed ivi continua, ogni funzione integrale , risulta essere una funzione primitiva della $f(x)$ in tutto I.

Applicando questo teorema siamo in grado di calcolare l'integrale definito di molte funzioni .

Infatti, supponendo di conoscere una primitiva $G(x)$ della funzione $f(x)$, continua in I, anche la funzione

, ,

sarà una primitiva di $f(x)$, quindi (osservazione V.5.1): $G(x) = F(x)$ + C, con C costante opportuna.

Abbiamo ora

.

Abbiamo pure perciò , la quale espressione viene generalmente scritta sotto la forma: , oppure anche .

Regola pratica : "Per calcolare un integrale definito di una funzione continua *f*(*x*) si cerca di trovare una qualunque primitiva *G*(*x*) della *f*(*x*) e poi si calcola la differenza fra il valore che questa assume nell'estremo superiore e il valore che assume nell'estremo inferiore di integrazione".

V.6. LA RICERCA DELLE PRIMITIVE. INTEGRALE INDEFINITO

Se $F(x)$ è una primitiva della funzione ***continua*** $f(x)$**,** sappiamo che tutte e sole le primitive di $f(x)$ sono della forma:

$F(x)$ + C ,

con C costante arbitraria.

Definizione [V.6.1]. La totalità delle primitive di una funzione continua $f(x)$ si chiama **integrale indefinito** della $f(x)$ e si indica con il simbolo

,

cioè con lo stesso simbolo dell'integrale definito (senza estremi di integrazione). Si legge: "Integrale di $f(x)$ in dx"

Bisogna altresì far notare la profonda differenza fra i concetti di integrale definito e di integrale indefinito. Il primo rappresenta un numero, mentre il secondo rappresenta un insieme di funzioni dipendenti da una costante additiva arbitraria.

Dalla definizione data segue , da cui l'operazione di integrazione indefinita può considerarsi come l'*operazione inversa* della derivazione.

Questo fatto porta come conseguenza che ad ogni regola di derivazione corrisponde una regola di integrazione indefinita, come vedremo in seguito.

V.7. INTEGRALI INDEFINITI IMMEDIATI

Se mediante le nozioni già acquisite nel calcolo differenziale si riconosce che la funzione continua [integranda] $f(x)$ è la derivata della funzione $F(x)$ (vedi tabella delle derivate fondamentali al II.13), l'integrale indefinito di $f(x)$ è immediato, essendo:

, con C costante arbitraria.

Noi sappiamo che se n è un numero qualunque si ha

,

oppure, cambiando n in n +1, si ha

da cui risulta che , con $n \neq -1$. Avremo quindi:

($n \neq -1$).

Quest'ultima formula vale anche per $n \neq 0$, infatti:

,

mentre per $n = -1$ si ha

.

infatti ciò è evidente per $x > 0$; mentre per $x < 0$ si ha , c.v.d.

Altri casi particolari:

; ; ; ; ; .

Ricordando sempre le derivate fondamentali, si ha in modo analogo:

; ; ; ;

; .

Per $n \neq -1$ è , come si verifica derivando.

Per $n = -1$ l'integrale precedente diventa: (verifica come sopra).

Analogamente si prova che

ed anche . Vedi tabella riassuntiva.

Esempi.

(V.7.1)

(V.7.2)

(V.7.3)

(V.7.4)

(V.7.5)

V.8. PROPRIETÀ DEGLI INTEGRALI INDEFINITI

1°) **L'integrale del prodotto di una costante per una funzione continua è uguale al prodotto della costante per l'integrale della funzione[5]:**

. Lo si dimostra derivando ambo i membri:

(1° membro)

(2° membro) .

2°) **L'integrale della somma algebrica di funzioni continue è uguale alla somma degli integrali delle singole funzioni:**

. Infatti:

come pure .

3°) **L'integrale di una combinazione lineare di funzioni continue è uguale alla combinazione lineare degli integrali delle funzioni date:**

. Risultato che riassume il 1° ed il 2°.

Osservazione. Per questa ragione l'integrale si dice anche che è un **operatore lineare** (come la derivata).

V.9. METODI DI INTEGRAZIONE

Quando la funzione integranda non è la derivata (o almeno è arduo vederlo) di una funzione nota, si può ricorrere ad alcuni metodi.

1) Integrazione elementare indefinita per scomposizione in somma.

Se si riesce ad esprimere la funzione integranda come algebrica di un numero finito di funzioni: , ,…, , che si sa integrare, si ha evidentemente:

.

Esempio [V.9.1]. Calcolare l'integrale: .

Si può operare così:

2) Integrazione per parti.

Siano e due funzioni continue insieme con la loro derivata prima.

Poiché

si ha

ossia[6]:

,

da cui:

Osserviamo che può considerarsi come il prodotto di due fattori e di cui il primo si chiama **fattore finito** e il secondo **fattore differenziale**. La regola espressa dall'ultima formula si può esprimere così:

L'integrale del prodotto di un fattore finito per un fattore differenziale è uguale al prodotto del fattore finito per l'integrale del fattore differenziale meno l'integrale del prodotto fra l'integrale del fattore differenziale per il differenziale del fattore finito.

Esempio [V.9.2]. Calcolare l'integrale .

Poniamo e .

Otteniamo e (la costante arbitraria C apparirà alla fine del procedimento).

Quindi, usando la regola di cui sopra, abbiamo

.

3) Integrazione per sostituzione.

Sia una funzione continua nell'intervallo e una funzione continua insieme con la sua derivata prima in un certo intervallo . Supponiamo inoltre che l'insieme delle immagini di sia contenuto in in modo che si possa considerare la funzione composta . Posto:

,

avremo:

.

Si ha pure

,

da cui

,

ossia[7]

.

Dalla prima relazione possiamo anche scrivere:

.

Supponiamo ora che la funzione sia dotata di funzione inversa , poiché , ponendo nell'ultima relazione appunto , si ha:

.

Esempio [V.9.3]. Si voglia calcolare l'integrale .

Poniamo: . Differenziando: , cioè: . Sostituendo:

.

Esempio [V.9.4]. Si voglia calcolare l'integrale **.**

Lo calcoleremo prima combinando i metodi per parti e di sostituzione e poi solo col metodo di integrazione per parti.

1° metodo ("combinato"):

.

Poniamo ora , da cui , cioè . Quindi:

2° metodo (per parti):

. Quindi (tenendo sempre presente la nota 22):

Ossevazione [V.9.1]. Usando metodi diversi si possono ottenere talvolta formulazioni diverse dell'integrale voluto. Si tenga presente che queste formulazioni o sono equivalenti o differiscono per una costante.

4) Integrazione definita per sostituzione.

Sia una funzione continua nell'intervallo e una funzione continua insieme con la sua derivata prima in un certo intervallo , con mai nulla (in modo che la funzione *x* = sia invertibile in tutto il suo dominio) Supponiamo inoltre che l'insieme delle immagini di contenga l'intervallo e chiamiamo la funzione inversa della *x* = . In tali ipotesi sussiste la relazione:

. (V.1.*)

Infatti, se *F*(*x*) è una primitiva di , si ha:

.

D'altro canto si nota facilmente che la funzione è una primitiva della funzione nell'intervallo (vedi regola di derivazione di funzioni composte II.10), quindi:

,

poiché le funzioni e sono tra loro inverse da cui si deduce: ; in particolare:

, , c.v.d.

Esempio [V.9.5]. Sfruttiamo questa occasione per calcolare l'area di un cerchi di raggio *r*.

In un sistema di assi cartesiani ortonormali *x*O*y* consideriamo la circonferenza di raggio *r* con centro nell'origine degli assi. Essa ha equazione:

.

L'equazione della semicirconferenza situata nel semipiano delle *y* positive, sarà:

e quindi l'area di un quarto di cerchio sarà

.

Ponendo , che per e , soddisfa le ipotesi della (V.1.*), abbiamo:

. Osservando che per $x = 0$ si ha $t = 0$, e per $x = r$ si ha , otteniamo:

.

L'area del cerchio sarà quindi , come si è già trovato in geometria.

Vedi figura 33.

Fig. 33

5) Derivata di una funzione integrale con estremi di integrazione variabili.

Vogliamo calcolare la derivata della funzione integrale in cui è una funzione continua e sono funzioni derivabili. Avremo (con le ipotesi del caso), per ogni Δ*x* infinitesimo non nullo:

= ,

essendo un valore del dominio di . Sarà quindi (V.4: relazione di Chasles):

, dove e

 sono due opportuni valori appartenenti rispettivamente agli intervalli e (teorema della media per funzioni continue). Immaginando che le funzioni e siano strettamente crescenti e che sia Δ*x* > 0, risulta chiaro pensare ad intervalli del genere su esposto. Il discorso vale comunque in generale. Abbiamo ora:

. Passando alla parte standard:

, per le ipotesi fatte.

In conclusione si ha la formula:

V.10. TABELLE RIASSUNTIVE SUGLI INTEGRALI INDEFINITI

Forme immediate

, con $n \neq -1$

, con $a > 0$, $a \neq 1$

, con $a > 0$, $a \neq 1$

, con $n \neq -1$

Integrali notevoli

, con $a \neq 0$

, con $a \neq 0$

, con $a > 0$, $a \neq 1$

V.11. INTEGRAZIONE DELLE FUNZIONI RAZIONALI FRATTE

Sia una funzione razionale fratta, cioè il quoziente fra due polinomi in x, che supporremo primi fra loro, e siano un polinomio di grado m e un polinomio di grado n.

Supponiamo dapprima che sia m ³ n. In tal caso si può eseguire la divisione fra e ottenendo come quoziente un polinomio di grado $m - n$ e come resto un polinomio di grado minore di n. Potremmo quidi scrivere:

.

Per calcolare , basterà quindi calcolare .

Il primo integrale è facilmente calcolabile, poiché è una funzione polinomiale intera. Per ricavare il secondo bisognerà saper integrare una funzione razionale fratta il cui numeratore sia un polinomio di grado inferiore a quello del polinomio a denominatore.

Consideriamo i casi seguenti.

1) Integrali del tipo: , cioè il caso frequente in cui *D*(*x*) è un polinomio di secondo grado: *R*(*x*) potrà quindi essere di primo grado o una costante.

Ci proponiamo quindi di calcolare integrali del tipo

(a) oppure (b) **.**

Vi sono tre casi possibili:

1° caso D > 0.

In questo caso il trinomio a denominatore è così scomponibile in fattori :

dove e sono le sue radici reali.

La funzione integranda (sia dal caso (a), sia del caso (b)) può essere scomposta nella somma di due frazioni elementari

,

che, essendo *A* e *B* delle costanti, sappiamo già integrare. Le suddette costanti si determinano applicando il **principio di identità dei polinomi**[8], come si vedrà negli esempi successivi.

Esempio [V.11.1] (relativo al caso (a)). Si voglia calcolare l'integrale .

Abbiamo = .

Poniamo , da cui applicando il principio di identità dei polinomi, si ha il sistema:

, cioè , , , ed infine: .

Otteniamo: .

Esempio [V.11.2] (relativo al caso (b)). Si voglia calcolare l'integrale .

Abbiamo .

Procedendo come sopra, troviamo: , da cui: .

Applicando qui ancora il principio di identità dei polinomi, si ha il sistema:

. Risolvendo si ha: .

Troviamo quindi che

.

Osservazione [V.11.1]. Per integrali del tipo (b) si potrebbe procedere anche in quest’altro modo. Cerchiamo, con qualche artificio (quando la cosa sia facile e proficua), di far apparire a numeratore la derivata del denominatore:

L’integrale rimasto è del tipo (a) e si risolve come si è visto. Avremo quindi:

, cioè:

.

Esempio [V.11.3] (altro esempio relativo al caso (b)). Si voglia calcolare l’integrale .

Con il solito procedimento avremo:

. Deve essere, identicamente:

, da cui si ricava: *A* = -1 e *B* = 2. Otteniamo, in definitiva:

.

2° caso D = 0.

In questo caso le radici e del trinomio a denominatore della funzione integranda sono coincidenti. Si ha perciò:

.

Per l’integrale (a) procediamo così:

.

L'integrale (b) si calcolerà invece scomponendo la funzione integranda in una somma del tipo:

.

Esempio [V.11.4] (relativo al caso (a)). Calcolare . Avremo:

.

NOTA IMPORTANTE. In generale per scomporre una frazione polinomiale con molteplicità *n* (riferita alle radici reali) ci si basa sulla formula:

(qui con a = 1 ed immaginando realizzabile la scomposizione con polinomi al massimo di 2° grado).

Esempio [V.11.5] (relativo al caso (b)). Calcolare . Avremo:

.

Quindi , da cui, con le solite considerazioni .

Risolvendo si ottiene: A = 1 e B = . Risulta allora:

.

3° caso D < 0.

È il caso "dell'arcotangente" nel senso che presto vedremo.

Nel caso (a) **,** l'integrale si può sempre porre nella forma: **.**

Esempio [V.11.6] (relativo appunto al caso (a)). Calcolare .

Avremo:

.

Vi è pure una formula di immediato utilizzo:

, dove è .

Infatti poiché D < 0, il trinomio ha radici complesse e .

Sarà , da cui si può pervenire alla formula sopra esposta.

Nel caso (b) **,** si cercherà invece di scomporre la funzione integranda nella somma di due frazioni algebriche, in modo tale che nella prima appaia al numeratore la derivata del denominatore (vedi osservazione V.11.1), ossia $2ax+b$, mentre nella seconda il denominatore sia una costante.

Esempio [V.11.7] (relativo appunto al caso (b)). Calcolare .

Il denominatore è una funzione definita da un trinomio con D negativo. A numeratore deve apparire la sua derivata che è . Operiamo così:

.

. Sarà quindi:

.

Per calcolare il secondo integrale opereremo come nell'esempio precedente, magari utilizzando la formula immediata.

Le radici dell'equazione sono . Quindi e . Avremo

. In definitiva:

.

V.12. INTEGRAZIONE DI PARTICOLARI FUNZIONI IRRAZIONALI

Vogliamo calcolare integrali del tipo

dove *f* è una funzione razionale di *x* e di .

Se non si riesce a calcolare l'integrale proposto con i metodi fin qui esposti, si può ricorrere alle cosiddette ***sostituzioni di Eulero***.

Si voglia ad esempio calcolare I = .

Abbiamo i seguenti due casi da considerare.

1) Se *a* > 0, conviene porre:

2) Se *a* < 0, conviene porre: , dove a è una delle radici (certamente esistenti) di , il cui discriminante è sicuramente non negativo, sennò non esisterebbe la funzione a denominatore.

Vediamo le procedure:

1) e I = .

Poniamo: . Otteniamo:

, da cui: .

Quindi ,

. Abbiamo ora:

I = .

Ed ancora I = . (V.12.*)

2) e I = .

Poniamo: , essendo , con .

Otteniamo: , , , cioè

e quindi , da cui

. In definitiva:

I = =

.

Quindi, essendo , se *x* > a e di conseguenza , possiamo concludere che I = . (V.12.**)

Esempio [V.12.1] (relativo al caso 1)). Calcolare I = .

Risolviamo dapprima con tutti i passaggi.

Poniamo .

Eleviamo al quadrato (*t* > *x*): , da cui

 e quindi .

I = , essendo .

Quindi: I = , che sarebbe stato immediatamente trovato, ponendo nella formula (V.12.*): *a* = -1, a = 1, b = 2.

Esempio [V.12.2] (relativo al caso 2)). Calcolare I = .

Analogamente a quanto fatto in precedenza, essendo , poniamo:

, con $1 < x < 2$. Otteniamo: , quindi

e , con $x > 1$ (vedi sopra). Inoltre:

, . Allora:

I = , risultato che sarebbe stato immediatamente trovato, ponendo nella (V.12.**): *a* = -1, a = 1, b = 2.

V.13. AREA DELLA PARTE DI PIANO DELIMITATA DAL GRAFICO DI DUE FUNZIONI

Consideriamo due funzioni continue e e supponiamo che i loro grafici si intersechino in due punti A e B di ascissa rispettivamente *a* e *b*. Supponiamo inoltre che sia , e che la parte di piano a delimitata dai due grafici in appartenga al semipiano delle ordinate positive, come in figura 34.

Fig. 34

Tutto quanto si dirà varrà comunque, come ben si comprenderà (e sarebbe facile dimostrarlo), anche nel caso in cui a attraversi l’asse *x* o ne stia completamente sotto.

Tenendo presente il significato geometrico di integrale definito, l’area di a è data dalla differenza fra l’area del trapezoide AA'B'B, delimitato dal grafico di e quella del trapezoide AA'B'B delimitato dal grafico di .
Chiamando *S* la misura della superficie di a, abbiamo quindi:

che, per la V.4.d, diventa . (V.13.*)

Esempio [V.13.1]. Sfruttiamo la formula precedente per calcolare l’area di un segmento parabolico, che secondo il ***teorema di Archimede***, è uguale ai di quella del rettangolo che ha un lato coincidente con la corda che determina il segmento parabolico e il lato opposto tangente alla parabola.

Verifichiamo il teorema nel caso particolare in cui la corda sia perpendicolare all’asse di simmetria della parabola[9].

Sia , con *a* > 0, l’equazione della parabola con asse verticale. Il segmento parabolico è la parte evidenziata in figura 35, mentre AA'B'B è il rettangolo circoscritto.

Fig. 35

Detta poi *m* (*m* > 0) l’ascissa di B, l’ordinata di B sarà . L’area del rettangolo AA'B'B varrà quindi

.

Ora la retta AB ha equazione , per cui l’area del segmento parabolico sarà data (vedi V.13.*) da:

, c.v.d.

V.14. VOLUME DI UN SOLIDO DI ROTAZIONE

Sia una funzione continua in un intervallo . Supponiamo inizialmente che sia . Consideriamo ora il *trapezoide T* delimitato dal grafico della funzione, dalle rette $x = a$, $x = b$ e dall’asse *x*. Facciamo ruotare tale trapezoide di un giro completo attorno all’asse *x*: vedi figura 36 (a) .

Fig. 36

(a)

(b)

Si ottiene così un solido di rotazione a di cui vogliamo determinare la misura *V* del volume.

Procediamo in modo analogo a quanto fatto in V.3.

Si consideri il trapezoide *T* . La sua area sappiamo che vale . Pensato *a* come costante ed *x* variabile il volume del solido di rotazione è una funzione di *x* e sarà denotato con $V(x)$. È intuitivo che la funzione $V(x)$ sia una funzione derivabile (alla stregua del V.5.2): cerchiamo la derivata di $V(x)$.

Prendendo Δx infinitesimo non nullo, l'incremento $\Delta V = V(x + \Delta x) - V(x)$ è infinitamente vicino al volume di un cilindretto avente per raggio di base $f(x)$ e per altezza Δx (vedi figura 36 (b)), cioè

.

Potremmo scrivere

, cioè e quindi .

Integrando fra gli estremi *a* e *b*, troviamo:

.

Esempio [V.14.1]. Calcolare il volume della sfera.

Consideriamo la sfera generata dalla rotazione, intorno all'asse x, del semicerchio di raggio r avente il centro nell'origine degli assi. Vedasi pure fig. 33 del V.9.n.4.

L'equazione della semicirconferenza nel semipiano positivo delle ordinate è, come sappiamo . Il volume della sfera è perciò

, come è noto dalla geometria.

V.15. INTEGRALI IMPROPRI

Finora abbiamo presentato il concetto di integrale definito di una funzione continua in un intervallo chiuso e limitato ("*compatto*" secondo definizione appropriata). Estendiamo ora la definizione di integrale trattando anche il caso di funzioni continue in un intervallo non chiuso o illimitato o di funzioni dotate di un numero finito di punti di discontinuità, dette funzioni *generalmente continue*[10].

1) Integrali impropri su intervalli illimitati (primo tipo).

Sia $f(x)$ una funzione continua in un intervallo *illimitato* del tipo . In tali ipotesi $f(x)$ risulta integrabile in ogni sottointervallo limitato con $t > a$, cioè in ogni intervallo $\subset$. In questo caso esiste l'integrale e il suo valore risulta una funzione dell'estremo superiore t di integrazione.

Si dice che la funzione $f(x)$ è *integrabile in senso improprio* (o generalizzato) nell'interallo se *esiste finita* la per ogni infinito positivo *H*. (V.15.*)

e scriveremo

infinito positivo.

In tal caso si dice che *l'integrale improprio* (o *generalizzato*)

(V.15.**)

è *convergente*.

Se invece "st" (V.15.*) è *infinita*, si dice che $f(x)$ non è integrabile in senso improprio in e che l'integrale (V.15.**) è *divergente*.

Se infine la "st" (V.15.*) *non esiste*, si dice che $f(x)$ non è integrabile in senso improprio in e che l'integrale (V.15.**) è *indeterminato*.

Analogamente si definisce l'integrale improprio di una funzione continua in un intervallo del tipo :

infinito positivo,

nonché l'integrale improprio di una funzione $f(x)$ continua nell'intervallo , cioè in tutto $\Re$:

infiniti positivi.

Si noti che gli iperreali infiniti *H* e *K* sono indipendenti tra loro.

Esempio [V.15.1]. Calcolare l'integrale .

Si ha, per ogni *H* infinito positivo, .

Possiamo quindi affermare che la funzione ha integrale improprio convergente, ossia è integrabile, sull'intervallo infinito e il suddetto integrale vale 1.

L'integrale definito di cui sopra rappresenta (significato geometrico) ovviamente l'area della parte di piano illimitata compresa tra il grafico della funzione, l'asse *x* e la retta *x* = 1. Vedi figura 37.

Fig. 37

Si noti come un "profilo" perimetrale infinito possa talvolta racchiudere una superficie di area finita.

Esempio [V.15.2]. Calcolare l'integrale .

Si ha, per ogni *H*,*K* infiniti positivi,

.

Possiamo quindi affermare che la funzione ha integrale improprio convergente, ossia è integrabile, sull’intervallo infinito e il suddetto integrale vale p.

Esempio [V.15.3]. Calcolare l’integrale .

Si ha, per ogni *H* infinito positivo, .

Ma, siccome non esiste , possiamo dire che la funzione $y = \sin x$ non è integrabile sull’intervallo .

Esempio [V.15.4]. Calcolare l’integrale .

Si ha, per ogni *H* infinito positivo,

.

Possiamo quindi concludere che l’integrale improprio proposto è divergente e che la funzione non è integrabile, in senso generalizzato, in .

2) Integrali impropri su intervalli limitati (secondo tipo).

Consideriamo il caso di una funzione $f(x)$ che sia continua nell’intervallo aperto a destra , cioè per . Siccome la funzione risulta continua in ogni intervallo del tipo , con infinitesimo positivo, strettamente contenuto in , esiste l’integrale che risulta una funzione di *e* .

Orbene, *se esiste finita*:

, (V.15.***)

si dice che la funzione f(*x*) *ha integrale improprio convergente nell'intervallo e, per definizione, si pone:*

per ogni infinitesimo positivo.

Se invece la "st" (V.15.***) è *infinita*, si dice che *f*(*x*) non è integrabile in senso improprio in e che l'integrale è *divergente*.

Se infine la "st" (V.15.***) *non esiste*, si dice che *f*(*x*) non è integrabile in senso improprio in e che l'integrale è *indeterminato*.

Analogamente si definisce l'integrale improprio di una funzione continua in un intervallo del tipo :

per ogni *d* infinitesimo positivo,

nonché l'integrale improprio di una funzione *f*(*x*) continua nell'intervallo :

per ogni *e* e *d* infinitesimi positivi.

Si noti che gli infinitesimi *e* e *d* sono indipendenti tra loro.

Esempio [V.15.5]. Calcolare l'integrale .

La funzione integranda è definita per $x < 3$ ed è continua, quindi integrabile in ogni intervallo del tipo $[0,3\text{-}e)$ con $e > 0$ infinitesimo .

Osserviamo pure che una primitiva di $f(x)$ è $F(x)$ = .

Si ha quindi .

3) Integrali impropri contemporaneamente di primo e secondo tipo.

Talvolta si incontrano integrali che sono contemporaneamente del primo e del secondo tipo (come noi qui li abbiamo ordinati). Chiariamo con un esempio la questione.

Esempio [V.15.6]. Calcolare l'integrale .

Osserviamo dapprima che la funzione integranda è continua e positiva nell'intervallo .

Cerchiamo una primitiva di . Ponendo abbiamo , nonché . Utilizzando il metodo di sostituzione, otteniamo:

. Avremo, per ogni $d > 0$ infinitesimo e per ogni H infinito positivo,

= .

4) Integrale di una funzione generalmente continua.

Sia *f*(*x*) una funzione generalmente continua[11] in I e siano i suoi punti di discontinuità. Suddividiamo I in un certo numero di sottointervalli i cui estremi siano , oltre agli eventuali estremi di I, in modo che *f*(*x*) sia continua nei punti interni di ciascuno di tali intervalli.

Possiamo quindi considerare, per ogni sottointervallo suddetto, l'integrale in senso improprio di *f*(*x*).

Se tali integrali sono tutti convergenti diremo che *f*(*x*) è *integrabile in senso improprio* in I e *il valore dell'integrale* di *f*(*x*) *sarà*, per definizione, *la somma algebrica dei suddetti integrali*.

Chiariamo con alcuni esempi la questione.

Esempio [V.15.7]. Calcolare, se è possibile, l'integrale .

La funzione integranda è continua in tutto l'intervallo I = [-1,3], tranne in $x = 0$, dove presenta una discontinuità di seconda specie (vedi II.6). Perciò *f*(*x*) è generalmente continua in I.

Suddividiamo allora l'intervallo I negli intervalli [-1,0] e [0,3], in ciascuno dei quali ha senso calcolare l'integrale improprio di *f*(*x*) (vedi figura 38).

Fig. 38

Si ha, per ogni infinitesimo positivo,

.

Si ha pure, per ogni infinitesimo positivo,

.

Per la convergenza dei suddetti integrali, possiamo dire che esiste l'integrale improprio di $f(x)$ in [-1,3] e che esso è dato da

.

NOTA BENE. In questo caso, se avessimo operato così: , cioè, pur seguendo un procedimento **errato** avremmo ottenuto un risultato corretto. Si badi bene che ciò non avviene in generale: si provi ad esempio con , il quale diverge, ma con il procedimento scorretto succitato si otterrebbe (risultato assurdo di per sé: la funzione integranda è sempre positiva). Oppure con : otterremmo , detto **valore principale di Cauchy**, che qui avrebbe pure senso come area-differenza fra due aree infinite, ma in qualche modo confrontabili (come pure accadrebbe nell'esempio [V.15.7]), nel momento in cui i due integrali in e in $[-1,2]$ divergono.

Esempio [V.15.8].

Calcolare, se è possibile, l'integrale $\int_0^3 f(x)dx$ con .

La funzione integranda ha una discontinuità di prima specie ("salto", vedi II.7) in x = 1, mentre è continua nel resto dell'intervallo [0,3]. Vedi figura 39.

Fig. 39

Preso *e* infinitesimo positivo, operiamo così:

.

OSSERVAZIONE. Poiché la funzione è continua in , si sarebbe potuto calcolare l'integrale in senso proprio.

NOTA BENE. Si noti che la funzione integrale ,

è continua anche in x = 1 (vedi fig. 40).

Fig. 40

Consideriamo ora , funzione integrale di :

.

Essa è continua [anche] in *x* = 1 ( ) ed è pure derivabile in *x* = 1 (vedi II.15):

.

OSSERVAZIONE. Una funzione si “abbellisce”(!!!) integrandola…(vedi fig. 41).

Fig. 41

V.16. LUNGHEZZA DI UN ARCO DI CURVA PIANA

Sia g un arco di curva piana di equazione compreso fra le ordinate corrispondenti alle ascisse *a* e *b*. Supponiamo che *f* (*x*) sia continua e derivabile con derivata continua nell’ intervallo I = . Vogliamo calcolare la **lunghezza** *L* di g , chiamata con le ipotesi fatte, arco di ***curva regolare***. Vedi figura 42.

Fig. 42

Suddividiamo l'intervallo, la cui ampiezza è *b* - *a*, in *n* parti uguali[12], ciascuna delle quali avrà quindi misura

.

Gli estremi dell'intervallo sono .

Da questi estremi conduciamo le perpendicolari all'asse delle ascisse; queste rette incontreranno -l'arco g nei punti P_0, P_1, …, P_{n-1}, P_n, come in figura.

Per ognuno degli intervalli I_i conduciamo per l'estremo P_{i-1} la retta tangente alla curva che interseca in Q_i la retta parallela all'asse *y* passante per P_i. Il segmento $P_{i-1}Q_i$ è un'approssimazione dell'archetto di curva $P_{i-1}P_i$ (vedi figura).

La somma delle misure degli *n* segmenti $P_{i-1}Q_i$ così ottenuti approssimerà la lunghezza dell'arco P_0P_n tanto meglio quanto più, in generale, sarà grande il valore di *n*.

Il segmentino generico ha lunghezza (teorema di Pitagora):

.

La somma delle misure degli *n* segmentini sarà o, più sinteticamente

.

La suddetta somma, come accennato, si può considerare un'approssimazione delle lunghezza L dell'arco di curva di cui trattiamo.

Poiché $S_n = S(\Delta x)$ è definito per ogni $\Delta x > 0$, per l'assioma di soluzione (**Assioma 6** degli assiomi sui numeri iperrali del 0.2), $L(dx)$ è definito per ogni iperreale $dx > 0$.

Se $dx > 0$ è infinitesimo, allora

$L(dx) =$

è la *somma di Riemann infinita* relativa al nostro problema.

Poiché la funzione è una funzione continua, nel dominio considerato (infatti lo è per ipotesi), per il teorema V.3.1, possiamo affermare che la somma di Riemann infinita di cui sopra è un numero iperreale finito.

È naturale quindi definire (ammesse tutte le ipotesi del caso, come da inizio di questo capitolo) come **lunghezza** L di g, arco di curva regolare**:**

Esempio.

Determinare la lunghezza dell'arco di curva di equazione , situato nel primo quadrante degli assi e compreso fra i punti di ascisse 2 e 5.

La curva è un'iperbole equilatera traslata (funzione omografica). Vedi figura 43.

Fig. 43

Si ha A(2,2) e B . La lunghezza dell'arco AB sarà

.

[1] N.B. Argomento analogo a quello che tratteremo nel paragrafo V.3.

[2] N.B. Vedi nota precedente.

[3] N.B. Vedi oltre: integrale indefinito.

[4] N.B. In generale la suddivisione viene fatta in parti di ampiezze anche diverse fra loro. L'importante è che le suddette ampiezze diventino tutte infinitesime. In questo caso i procedimenti sono equivalenti.

[5] N.B. IMPORTANTE. Si ricordi sempre l'uguaglianza fra due simboli di integrale indefinito si intende asserire che i due membri di dette formule **differiscono al più per una costante**. Infatti un integrale indefinito contiene una costante additiva arbitraria.

[6] N.B. Si tenga presente la nota 22.

[7] N.B. Si tenga presente la nota 22.

[8] N.B. Due polinomi P(x) e Q(x) si dicono **identici** se assumono gli stessi valori quando si sostituisce alla variabile x uno stesso valore a, cioè P(a) = Q(a), "a ∈ ℜ. Si dimostra che ciò accade se e solo se i due polinomi hanno gli stessi coefficienti relativi alle stesse potenze.

[9] N.B. In questo caso si parla di rettangolo circoscritto al segmento parabolico.

[10] N.B. Sia I un intervallo in ℜ (limitato o illimitato). Una funzione I → ℜ si dice **generalmente continua** (in breve g.c.) se l'insieme dei suoi punti di discontinuità non ha punti infinitamente avvicinabili reali, ovvero se ogni sottointervallo limitato di I ammette al più un numero finito di discontinuità.

[11] N.B. Vedi nota 27.

[12] N.B. (Vedi nota 21) In generale la suddivisione viene fatta in parti di ampiezze anche diverse fra loro. L'importante è che le suddette ampiezze diventino tutte infinitesime. In questo caso i procedimenti sono equivalenti.

APPENDICE

A.1. ELEMENTI DI LOGICA FORMALE (O SIMBOLICA)

- Che cosa **non è** la logica formale: l’arte di ragionare.
- Che cosa **è**: semplicemente una presa di coscienza dei processi deduttivi.

La logica presuppone una oggettività (totale) di ragionamento.

CALCOLO DELLE PROPOSIZIONI

1) Proposizioni

Definizione 1:
Per **proposizione** (o **enunciato**[1]) intendiamo un’espressione del linguaggio (o forma linguistica) per la quale ha senso affermare che essa è **vera** o **falsa**, e a cui compete uno ed uno solo dei due suddetti attributi (cioè una proposizione o è solo vera o è solo falsa).

Sono esempi di proposizioni (vere o false):
- Torino è in Piemonte
- 2 > 5
- La luna ruota intorno alla terra

Non sono invece considerate proposizioni le seguenti espressioni (perché non si può assegnare loro un valore di verità 0 o 1):
- Questo quadro è bello
- Domani pioverà
- Chi vincerà il prossimo campionato?

Stiamo quindi occupandoci di una “logica a **due** valori” (vero o falso). Tali valori (o attributi) saranno indicati con **0** (falso) e **1** (vero). Infatti l’algebra delle proposizioni si basa su due principi:

1) **Principio di non contraddizione**: una proposizione non può essere *contemporaneamente* vera e falsa.
2) **Principio del terzo escluso**: se una proposizione è vera, la sua negazione è falsa; e viceversa.

Una o più proposizioni possono essere combinate tra loro, per formarne altre più complesse (come capita nel linguaggio usuale), attraverso dei **connettivi** (o **operatori**) che andremo a studiare.
Il valore di verità delle proposizioni composte dipende dal valore di verità delle proposizioni componenti e per determinarlo faremo uso delle **tavole di verità** (o **tabelle di verità** o **matrici di verità**), le quali associano, ad ogni distribuzione dei valori di verità delle proposizioni componenti, il corrispondente valore di verità della proposizione composta.

Indicheremo, per brevità, con una lettera (latina, minuscola o maiuscola) un certo enunciato.

Due proposizioni p e q aventi la stessa tavola di verità si dicono **equivalenti**. Indicheremo ciò con la scrittura $p \equiv q$.

2) Connettivi proposizionali

a) **Negazione**. È una operazione unaria, ossia operante su un solo enunciato. Essa cambia il valore di verità di quest’ultimo. Si indica col simbolo “$\neg$” oppure si pone una lineetta sull’espressione che rappresenta la *frase* da negare.

Ad esempio, sia p = “Carlo studia”
sarà $\neg p = \overline{p}$ = “Carlo non studia”
$\neg p$ si legge “non p” e si ha la seguente tavola di verità:

p	¬p
0	1
1	0

Si deduce che

La negazione di una proposizione è vera se la proposizione è falsa, mentre è falsa se la proposizione è vera: ne cambia quindi i valori di verità.

Proprietà 1 (legge della doppia negazione): **¬¬**p **≡** p (oppure si scrive $\overline{\overline{p}}$ **≡** p)

b) **Congiunzione logica** o **prodotto logico**. È un'operazione binaria che, date due proposizioni, ne produce una nuova collegandole con la particella "e" (o "et", dal latino), indicata con "∧". Simbolicamente si scrive $p \land q$.

Ad esempio, sia p = "Carlo studia"
q = "Piero mangia"
sarà $p \land q$ = "Carlo studia e Piero mangia"

Il prodotto logico di due proposizione è vero se entrambe le proposizioni componenti lo sono, falso in tutti gli altri casi.

Eccone la tavola di verità:

p	q	p ∧ q
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

c) **Disgiunzione non esclusiva** o **somma logica**. È un'operazione binaria che, date due proposizioni, ne produce una nuova collegandole con la particella "o" (o "vel" latino), indicata con "$\vee$". Simbolicamente si scrive $p \vee q$.
Il significato, qui, del connettivo "o" è quello di non escludere il contemporaneo verificarsi di ciò che descrivono le due proposizioni, proprio nel senso del "VEL" latino, al contrario dell'"AUT" il quale esclude che due azioni possano avvenire contemporaneamente: "Aut disce aut discede" che significa "O studi o te ne vai", cioè può avvenire una sola delle azioni previste.

Ad esempio, sia p = "Carlo studia"
q = "Piero mangia"
sarà $p \vee q$ = "Carlo studia o Piero mangia"

La somma logica di due proposizione è falsa se entrambe le proposizioni componenti lo sono, vera in tutti gli altri casi.

Eccone la tavola di verità:

p	**q**	**p ∨ q**
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

d) **Implicazione materiale**. È un'operazione binaria che, date due proposizioni p e q, le lega mediante l'espressione "se p allora q" e si indica scrivendo $p \rightarrow q$, dove p è detta *antecedente* e q *conseguente*. Si legge anche, sinteticamente, "p implica q".

Ad esempio, sia p = "Carlo studia"
q = "Carlo è promosso"

sarà $p \rightarrow q$ = “Se Carlo studia allora Carlo è promosso”

La proposizione composta mediante l’implicazione materiale è falsa quando l’antecedente è vera e la conseguente è falsa. In tutti gli altri casi è vera.

Eccone la tavola di verità:

p	**q**	**p → q**
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Osservazione 1. Ci si potrebbe stupire del fatto che “FALSO implica VERO” dia “VERO”. Ci sono vari modi per giustificarlo, ma si pensi che qui siamo in un ambiente di tipo assiomatico, in cui le regole iniziali (i postulati) vengono dati “arbitrariamente”, ma non senza una specifica finalità. Ad es. il motivo più “tecnico” di questa affermazione è che in questo modo si mantiene come tautologia (vedi più avanti) il “modus ponens”, che è la formalizzazione del processo deduttivo per eccellenza che l’uomo razionale ha comunemente ed istintivamente sempre utilizzato.

e) **Biimplicazione** (o **doppia implicazione** o **bicondizionale** o **equivalenza**). È il connettivo che lega due proposizioni p e q con l’espressione “p se e solo se q” e si indica scrivendo $p \leftrightarrow q$.

Ad esempio, sia p = “Il negoziante vende la merce”
q = “Il cliente paga subito”
sarà $p \leftrightarrow q$ = “Il negoziante vende la merce se e solo se il cliente paga subito”

La proposizione composta con la biimplicazione è vera quando le sue componenti hanno lo stesso valore di verità, cioè o sono entrambe vere o entrambe false. È falsa negli altri casi.

Eccone la tavola di verità:

p	**q**	**p ↔ q**
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Nota 1. Esiste anche l'**implicazione logica**, indicata col simbolo "⇒", per la quale l'antecedente è sempre vero, utilizzata nella formulazione dei teoremi in cui, come è noto, l'ipotesi (antecedente) è considerata sempre vera. Analogamente, in questo contesto, si utilizza il simbolo "⇔" per la biimplicazione.
Va anche detto che molti autori non fanno distinzione fra le due simbologie (come anche qui si è fatto al punto 5: esercizio di logica).

Ovviamente si possono comporre proposizioni in modo arbitrario (rispettando naturalmente la sintassi), molto lunghe e complesse, delle quali ha interesse calcolarne le tavole di verità. Si farà uso anche delle parentesi per distinguere un "blocco" dall'altro. Esempio:

$$(\neg p \vee (q \wedge r)) \rightarrow (p \vee r)$$

Nota 2. La logica formale si occupa esclusivamente della SINTASSI (cioè della correttezza formale delle frasi[2]) e non della SEMANTICA (cioè del significato intrinseco e specifico delle frasi). Ad es. ha senso calcolare valori di verità dell'espressione "Se io sono Napoleone allora 3 più 5 fa 27", la quale non ha molto senso, diciamo, per la gente comune, ma è ben formata sintatticamente (ed ortograficamente) potendosi correttamente esprimere nel linguaggio logico formale di cui ci stiamo occupando.

Nota 3. La biimplicazione “↔” o “⇔”è in pratica una equivalenza fra proposizioni. Va però distinta dall’equivalenza “≡” di cui abbiamo parlato all’inizio. Quest’ultima studia “dal di fuori” (metalogica) il fatto che due affermazioni dicano la stessa cosa. L’altra fa parte dei connettivi della teoria e può essere anche così definita:

$$(p \leftrightarrow q) \equiv (p \to q) \wedge (q \to p)$$

Definizione 2. Una frase sempre vera (indipendentemente cioè dai valori di verità delle sue eventuali componenti) si chiama **tautologia** (o anche **tesi logica**).

Definizione 3. Una frase che può avere diversi valori di verità (in funzione di quelli delle sue eventuali componenti), si chiama **soddisfacibile** o **amfòtera** o **contingente.**

Definizione 4. Una frase sempre falsa (indipendentemente cioè dai valori di verità delle sue eventuali componenti) si chiama **contraddizione**.

Osservazione 2. Si può dimostrare che ogni operazione logica binaria si può esprimere utilizzando solo i connettivi su esposti, anzi ne basterebbero solo due: la negazione ed uno dei connettivi ∨, ∧, →. Ad es., utilizzando ¬ e ∨, possiamo “simulare” l’implicazione. Infatti si ottiene:

$$(p \to q) \equiv \neg p \vee q$$

Scriviamola così $(p \to q) \leftrightarrow (\neg p \vee q)$ e facciamo vedere che è una tautologia. Eccone la tavola di verità che dimostra la tesi.

p	**q**	**p → q**	**¬p**	**¬p ∨ q**	**(p → q) ↔ (¬p ∨ q)**
0	0	1	1	1	1

0	1	1	1	1	1
1	0	0	0	0	1
1	1	1	0	1	1

3) Proposizioni equivalenti

1) $\overline{\overline{p}} \equiv p$ legge della doppia negazione

2) $(p \wedge p) \equiv p$ legge di idempotenza di $\wedge$
3) $(p \vee p) \equiv p$ legge di idempotenza di $\vee$

4) $(p \wedge q) \equiv (q \wedge p)$ legge di commutatività di $\wedge$
5) $(p \vee q) \equiv (q \vee p)$ legge di commutatività di $\vee$

6) $\left[(p \wedge q) \wedge r\right] \equiv \left[p \wedge (q \wedge r)\right]$ legge di associatività di
7) legge di associatività di

8) leggi di distributività tra
9) e

10) leggi di assorbimento tra
11) e

12) leggi di De Morgan
13)

14) legge di distributività tra e
15) legge di distributività tra e

16)
17)

19) legge di commutatività di

20)

21) definizione di

22) definizione di mediante e
23) definizione di mediante

24)
definizione di

4) Alcune TAUTOLOGIE

1) legge di identità

2) legge del terzo escluso

3) legge di non contraddizione (*)

4)

5)

6) **modus ponens**

7)

8)

9)

10)

11)

12) legge di transitività di

13) legge di transitività di

14) legge di contrapposizione (dimostrazione
per assurdo)

(*) NOTA. La legge di non contraddizione si può ricavare dal "terzo escluso" con le leggi di De Morgan, o viceversa:

oppure

oppure

5) Esercizio di logica

Abbiamo le seguenti tre frasi:

1) "Bianchi non è eleggibile a meno che si sia dimesso dall'incarico e abbia firmato una rinuncia".

2) "Bianchi è eleggibile se si è dimesso dall'incarico oppure ha firmato una rinuncia".

3) "Bianchi è eleggibile solo se ha firmato una rinuncia".

Si chiede di:

1°) Cifrare le frasi
2°) Dire "ad occhio" se una ne implica un'altra.
3°) Controllare tramite tavole di verità.

Bozza di risoluzione.

Chiamo:

A = “Bianchi è eleggibile”
B = “Bianchi si è dimesso”
C = “Bianchi ha firmato una rinuncia”

Traduco le frasi:

1) $\neg A \Rightarrow \neg (B \wedge C)$ e dunque $(B \wedge C) \Rightarrow A$
2) $(B \vee C) \Rightarrow A$
3) $A \Rightarrow C$

Si scopre che (2) ⇒ (1) e vi è solo questa implicazione.

A	**B**	**C**	**$B \wedge C$**	**$(B \wedge C) \Rightarrow A$**	**$B \vee C$**	**$(B \vee C) \Rightarrow A$**	**(2)⇒(1)**	**$A \Rightarrow C$**
0	**0**	**0**	**0**	**1**	**0**	**1**	**1**	**1**
0	**0**	**1**	**0**	**1**	**1**	**0**	**1**	**1**
0	**1**	**0**	**0**	**1**	**1**	**0**	**1**	**1**
0	**1**	**1**	**1**	**0**	**1**	**0**	**1**	**1**
1	**0**	**0**	**0**	**1**	**0**	**1**	**1**	**0**
1	**0**	**1**	**0**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**
1	**1**	**0**	**0**	**1**	**1**	**1**	**1**	**0**
1	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**
Prop. base				**Frase (1)**		**Frase (2)**		**Frase (3)**

Osservazione 3. Qui si è utilizzato il simbolo ⇒ come implicazione materiale (alla maniera, come si è accennato, di alcuni autori).

[1] N.B. Alcuni autori distinguono fra *proposizione* ed *enunciato*. Vedasi ad es. D. C. Demaria, "Topologia generale", vol. 1, ed. Tirrenia (TO), 1970.

[2] N.B. Qui talvolta, per brevità e semplicità, si è fatto uso del termine "frase" al posto di "proposizione" (o "proposizione composta").

A.2. TEORIA DEGLI INSIEMI

A.2.1. PREMESSE

Due sono essenzialmente i punti di vista, i modi usati, di formulare la suddetta teoria:

- metodo intuitivo (o teoria “ingenua” degli insiemi), che noi useremo;
- metodo assiomatico (più rigoroso), come ad es. la sistemazione di Zermelo e Fraenkel.

Il concetto di **insieme** si traduce solitamente come idea primitiva, non definibile se non facendo un discorso vizioso, usando cioè dei sinonimi della parola insieme. Infatti, noi potremmo immaginare l’insieme appunto come un gruppo, una collezione, un aggregato di oggetti. Questi oggetti si chiamano **elementi** dell’insieme stesso. Gli insiemi vengono di solito denotati con lettere latine maiuscole, i loro elementi con lettere minuscole. Poiché, come può essere intuito, un insieme può essere pensato come elemento di un altro insieme (quest’ultimo prende in genere il nome di “**famiglia** di insiemi”), la distinzione tra “elemento” ed “insieme” ha un valore relativo e non assoluto.

Il predicato o simbolo $\in$ si legge “appartiene a …” o “è elemento di…”; il simbolo contrario $\notin$ si legge “non appartiene a …” o “non è elemento di …” (predicati di appartenenza).

Un insieme A viene individuato:

- quando elenchiamo tutti i suoi elementi (modalità “estensiva”);

- quando assegniamo una proprietà caratteristica di tutti i suoi elementi e di essi soli (modalità “intensiva”).

Per un approfondimento di questo concetto vedasi oltre il “paradosso di Russell”.

Ecco alcuni esempi:

A = {a,b,c,3}. Cioè: l’insieme A è formato dagli elementi a,b,c,3.

C = {*x* / *x* è un cane}. Leggasi: “C è l’insieme degli *x* tali che *x* è un cane”

Il simbolo /, che significa “tale che” può scriversi anche “:”.

Si noti pure l’uso delle parentesi graffe.

Come il lettore avrà già intuito, nell’esporre la teoria degli insiemi (in forma “ingenua”), si stanno introducendo anche i vari simboli del linguaggio insiemistica e i loro modi di utilizzo: è come apprendere una nuova lingua per cui si ha bisogno sia dei vocaboli appropriati, sia della grammatica, sia della sintassi, sia della semantica. In questa sede si daranno le nozioni fondamentali della suddetta teoria e si presenteranno i simboli necessari ad un suo esauriente apprendimento pur non seguendo un ordine di stretto rigore e tralasciando una catalogazione esasperata al fine, cioè, di non annoiare troppo il lettore e di stimolarlo ad un approfondimento dell’argomento in sedi specifiche.

Non tutti i predicati o le proprietà che si potrebbero usare, al fine di individuare un insieme, danno effetti positivi. Vi sono, infatti, proprietà che non danno origine ad alcun insieme ben definito, ma generano dei paradossi o delle antinomie, la più famosa (ma non la prima scoperta) delle quali è quella dovuta a Russell (come si è detto all'inizio del paragrafo). Sorge così l'esigenza di limitare, "regolarizzare", questi predicati: ciò è stato fatto da Zermelo e Fraenkel. Per ovviare alle antinomie della teoria degli insiemi possiamo, ad esempio (come si fa in statistica e calcolo delle probabilità), convenire do restare entro un ben determinato insieme ambiente o **universo** W di cui si conosca quanto a noi necessita; pertanto tutti gli elementi e tutti gli insiemi che considereremo dovranno avere una precisa collocazione in W.

Per essere più espliciti avvertiamo che, ad esempio, non possiamo prendere in considerazione insiemi troppo "ampi" come sarebbe, infatti, l'insieme di tutti gli insiemi: esso, si noti, non è un insieme ! Infatti ha se stesso sia come sottoinsieme (vedi definizione 2) sia come elemento (vedi ancora paradosso di Russell). Questi insiemi più "strani" vengono in genere chiamati "classi".

Diamo ora alcune importanti e fondamentali definizioni con le quali si fonda una seria teoria insiemistica.

DEFINIZIONE 1. – Chiamiamo **insieme vuoto** (o **insieme nullo**) un insieme che

non possiede alcun elemento.

Tale insieme viene indicato col simbolo ∅ (simile ad una effe

greca).

Un modo per indicarlo "in formule" è $\emptyset =_{\text{def}} \{x \,/\, x \neq x\}$

"$=_{\text{def}}$" si legge e si intende "uguale per definizione".

A.2.2. SOTTOINSIEMI. INCLUSIONI

Mediante la relazione di appartenenza possiamo definire la relazione di inclusione tra insiemi nel seguente modo:

DEFINIZIONE 2. – Siano A e B due insiemi. Se ogni elemento di A è anche

elemento di B, si dice che A è contenuto (o incluso) in B,

scrivendo $A \subseteq B$, oppure che B è contiene A, scrivendo B Ê A.

Si dice pure che A è un **sottoinsieme** di B e che B è un

soprainsieme di A. Se poi vi è almeno un elemento di B che

non appartiene ad A, si dice che A è un **sottoinsieme proprio** di

B e che B è un **soprainsieme proprio** di A, scrivendo

rispettivamente $A \subset B$, $B \supset A$.

Le definizioni precedenti si possono tradurre simbolicamente nel seguente modo:

(2a):

$A \subseteq B =_{def} (\forall x)(x \in A \Rightarrow x \in B)$ o anche

$(\forall x \,/\, x \in A \Rightarrow x \in B)$

N.B “ ∀ ” significa e si legge “per ogni” : quantificatore universale.

La definizione simbolica di cui sopra può così essere letta:

“A sottoinsieme di (o incluso in) B è uguale per definizione all’insieme degli elementi x tali che per ogni x che appartiene ad A appartiene anche a B”. In termini di lingua corrente: “gli elementi di A sono anche di B”.

(2b):

$A \subset B =_{\text{def}} (A \subseteq B) \wedge (\exists\, x)(\, x \in B \wedge x \notin A)$

“∃” significa “esiste almeno un”: quantificatore esistenziale.

La (2b) si può leggere: “A sottoinsieme proprio di B significa che A è incluso in B ed esiste almeno un elemento di B che non appartiene ad A”.

DEFINIZIONE 3. – Dati due insiemi A e B, se ogni elemento di A è anche elemento

di B, e viceversa, si dice che **A è uguale a B**, scrivendo A = B.

La negazione di questa relazione si indica con A ≠ B.

In simboli:

A = B equivale a: $(\forall x \,/\, x \in A \Rightarrow x \in B \wedge x \in B \Rightarrow x \in A)$

$(\forall x)(\, x \in A \Leftrightarrow x \in B)$

A ≠ B equivale a: $(\exists x)(\, x \in A \wedge x \notin B) \vee (x \in B \wedge x \notin A)$

OSSERVAZIONE 1. – L’insieme vuoto ∅ è sottoinsieme di qualsiasi insieme.

– Ogni insieme è sottoinsieme di se stesso ma impropriamente.

DEFINIZIONE 4. – Sia I un insieme. Si chiama **insieme delle parti** o **insieme**

potenza di I l’insieme formato da tutti i sottoinsiemi di I. Tale

insieme viene indicato con P(I) che si legge “Pi di I”. [1]

ESEMPIO.

Sia I = {a,b,c}, avremo P(I) = {{a},{b},{c},{a,b},{a,c},{b,c},{a,b,c}, ∅}, cioè

P(I) = { ∅, {a},{b},{c},{a,b},{a,c},{b,c}, I }.

Si notino gli insiemi unitari, ad esempio {a}, gli insiemi di due elementi (o insiemi coppia), l’insieme vuoto e l’insieme I stesso.

Sarà utile, a questo punto, e per i paragrafi successivi, accennare alla rappresentazione grafica più usata nei riguardi degli insiemi: essa è dovuta ad Eulero-Venn e consiste nell’utilizzare linee chiuse; all’interno della regione da esse definita si immaginano o vengono rappresentati gli elementi dell’insieme considerato.

Talvolta sarà utile pure la rappresentazione di tipo cartesiano, soprattutto nel caso di insiemi aventi un numero infinito di elementi (ad es. punti di una retta).

Le figure accanto alle prossime definizioni chiariranno le idee.

A.2.3. OPERAZIONI FRA INSIEMI E SOTTOINSIEMI

DEFINIZIONE 5. – Siano I un insieme ed A un suo sottoinsieme. Si chiama

insieme complementare di A rispetto ad I, scrivendo I-A il

sottoinsieme di I formato da tutti e soli gli elementi di I che non

appartengono ad A.

In simboli:

$I - A =_{def} (\forall x)(x \in I \wedge x \notin A)$ oppure: $I - A =_{def} \{x \,/\, x \in I \wedge x \notin A\}$

DEFINIZIONE 6. – Siano A e B due insiemi. Chiamiamo **unione** di A e B,

scrivendo $A \bigcup B$, l'insieme formato dagli elementi che stanno

o in A, o in B, o in entrambi (se ce ne sono).

$A \bigcup B =_{def} \{x \,/\, x \in A \vee x \in B\}$, definizione in simboli dove il significato del connettivo "$\vee$" rivela chiaramente il suo operato non esclusivo: "o questo, o quello, o entrambi".

DEFINIZIONE 7. – Siano A e B due insiemi. Chiamiamo **intersezione** di A e di B,

scrivendo $A \cap B$, l'insieme formato dagli elementi che stanno

sia in A che in B.

In simboli:

$A \cap B =_{def} \{x \,/\, x \in A \wedge x \in B\}$

ESEMPIO.

Sia A = {a,b,c,d,e} e B = {d,e,f,g}.

Avremo: $A \bigcup B$ = {a,b,c,d,e,f,g} e $A \cap B$ = {d,e}.

Può accadere che i due insiemi A e B non abbiano elementi in comune. In questo caso la loro **intersezione è vuota** cioè **è uguale all'insieme vuoto**.

Se i due insiemi non hanno elementi in comune si dicono **insiemi disgiunti**.

Se A è sottoinsieme di B, l'intersezione è uguale ad A e l'unione è uguale a B.

DEFINIZIONE 8. – Siano I un insieme non vuoto ($I \neq \emptyset$) ed R una famiglia di

sottoinsiemi di I. Si dice che R è un **ricoprimento** di I se

l'unione di tutti gli elementi di R è uguale ad I.

(N.B. Alcuni Autori definiscono ricoprimento una famiglia di sottoinsiemi di I l'unione dei quali contiene I).

ESEMPIO.

Sia $I = \{a,b,c\}$, allora $R = \{\{a,b\}, \{b,c\}, \{c\}\}$ è un ricoprimento di I.

Infatti è $\{a,b\} \bigcup \{b,c\} \bigcup \{c\} = I$.

Come si può ben notare il ricoprimento non è quasi mai (tranne il caso $I = \emptyset$) unico.

DEFINIZIONE 9. – Un ricoprimento R di i si dice **partizione** di I se:

· gli elementi di R sono a due a due disgiunti;

· nessun elemento di R è l'insieme vuoto.

OSSERVAZIONE 2. Il ricoprimento massimo (nel senso di maggior numero di elementi) di un insieme I è P(I) (privato ovviamente di ∅).

DEFINIZIONE 10. – Siano A e B due insiemi disgiunti. Si chiama **prodotto**

cartesiano di A e B (scrivendo A × B) l'insieme degli

elementi-coppia {a,b} con a ∈ A e b ∈ B. In questo caso

gli insiemi A e B si dicono **fattori** .

In simboli:

$A \times B =_{def} \{x \, / \, x = \{a,b\} \wedge a \in A \wedge b \in B\}$

ESEMPIO.

Sia A = {a,b,c} , B = {1,2,3,4}. Avremo:

$A \times B = \{\{a,1\},\{a,2\},\{a,3\},\{a,4\},\{b,1\},\{b,2\},\{b,3\},\{b,4\},\{c,1\},\{c,2\},\{c,3\},\{c,4\}\}$.

Rappresentazione pseudo-cartesiana di $A \times B$:

OSSERVAZIONE 3. Come è facile convincersi, se *n* è il numero (finito) di elementi di A ed *m* il numero di elementi di B, il prodotto cartesiano $A \times B$ ha $n \times m$ elementi.

DEFINIZIONE 10 bis. – Siano A e B due insiemi qualunque. Si chiama **prodotto**

cartesiano ordinato di A e di B, l'insieme delle coppie

ordinate (a,b) [2] con $a \in A$ e $b \in B$.

In simboli:

$A \times B =_{def} \{x \,/\, x = (a,b) \wedge a \in A \wedge b \in B\}$.

In questo frangente gli insiemi A e B vengono chiamati **primo** e **secondo fattore**.

ESEMPIO. Eseguire il prodotto cartesiano dei seguenti due insiemi:

A = {0,x,y,z} ; B = {1,3,7} .

Avremo: A×B = {(0,1),(0,3),(0,7),(x,1),(x,3),(x,7),(y,1),(y,3),(y,7),(z,1),(z,3),(z,7)}.

Graficamente:

OSSERVAZIONE 4. Per quanto riguarda il numero di elementi di A×B (ordinato) vale la regola enunciata nell'osservazione alla definizione n. 10.

A.2.4. RELAZIONI O CORRISPONDENZE FRA INSIEMI

DEFINIZIONE 11. – Siano A e B due insiemi (eventualmente coincidenti) e sia

A × B il loro prodotto cartesiano ordinato. Si chiama **grafo** [3]

(di una relazione tra l'insieme A e l'insieme B) un qualunque

sottoinsieme F di A × B.

ESEMPIO GRAFICO.

DEFINIZIONE 11. – Per mezzo del sottoinsieme (o grafo) F possiamo definire una

relazione o **corrispondenza** φ (fi minuscola) nel seguente

modo:

· se (a,b) ∈ F, si dice che b è **in relazione** con a o è un **corrispondente** di a, rispetto a φ, vale a dire che si associa ad ogni primo elemento delle coppie di F il rispettivo secondo elemento;

· se (a,b) ∈ F, si dice pure che b è una **immagine** di a e che a è una **controimmagine** di b in φ, scrivendo $b = \varphi(a)$ e $a = \varphi^{-1}(b)$ od anche $\varphi : a \rightarrow b$; inoltre si indica la relazione o corrispondenza associata al grafo F col simbolo: $\varphi : A \rightarrow B$.

DEFINIZIONE 12. – Sia $\varphi : A \rightarrow B$ una relazione: l'insieme A si chiama

dominio di φ e l'insieme B si chiama **codominio** o **rango**

di φ. Indichiamo con φ(A) l'immagine della relazione, vale a

dire l'insieme delle immagini; con $\varphi^{-1}(B)$ la controimmagine

di φ, vale a dire l'insieme delle controimmagini.

ESEMPI GRAFICI.

OSSERVAZIONE 5. Se F = ∅ si ottiene la **relazione vuota** in cui non esiste

alcuna coppia di elementi corrispondenti; se invece F = A×B

si ottiene la **relazione banale** in cui ad ogni elemento di A

corrisponde ogni elemento di B.

OSSERVAZIONE 6. Da quanto detto risulta che una relazione è definita da una

terna di elementi, precisamente il **dominio A**, il **codomimio**

B ed il **grafo F** ($F \subseteq A \times B$). Pertanto una relazione φ può

considerarsi come una terna ordinata φ = (A,B,F) (nota di

derivazione francese).

DEFINIZIONE 13. – Una relazione si dice **ovunque definita**, se ogni elemento di A

ha, per mezzo di essa, almeno un corrispondente o immagine,

cioè se la controimmagine di B è A: $\varphi^{-1}(B) = A$.

Semplicemente: se “esaurisce” tutto l’insieme A.

Graficamente (es.):

DEFINIZIONE 14. – Una relazione si dice **funzionale** o **ad un sol valore** o **univoca**, se ogni elemento di A possiede, per mezzo di essa, al più un corrispondente, cioè, fissato un generico elemento *a*, non c’è alcuna coppia di F che contenga *a* come primo elemento oppure ce n’è una sola.

Graficamente (es.):

DEFINIZIONE 15. – Una relazione si dice **FUNZIONE** o **APPLICAZIONE** , se essa è **ovunque definita e funzionale**, cioè, per ogni elemento di A esiste sempre un’unica coppia di F che lo contiene come primo elemento.

Sinteticamente: se ogni elemento di A possiede una ed una sola immagine.

Graficamente (es.):

DEFINIZIONE 16. – Una relazione si dice **suriettiva**, quando ogni elemento di B è

immagine di qualche elemento di A, cioè se l'immagine di A

è B.

In altri termini: se "esaurisce" B: $\varphi(A) = B$.

Esempi grafici:

DEFINIZIONE 17. – Una relazione si dice **iniettiva**, se ogni elemento di B è

immagine al più di un elemento di A, cioè se dato un generico

$b \in B$, o non c'è in F alcuna coppia che contenga *b* come

secondo elemento oppure ce n'è una sola.

Si noti che l'iniettività (per così dire) si può esprimere più chiaramente dicendo che elementi diversi di a hanno immagini diverse (o non ne hanno affatto) in B. In simboli:

$$(\forall a_1)(\forall a_2)\ [a_1 \neq a_2 \Rightarrow \varphi(a_1) \neq \varphi(a_2)]$$

Graficamente (es.):

DEFINIZIONE 17. – Una **funzione** diventa **biiettiva** e si chiama **biiezione** quando

è sia suriettiva che iniettiva, quando, cioè, gli elementi di A e

di B sono tra loro in **corrispondenza biunivoca** senza

eccezioni.

Graficamente e “simbolicamente”:

DEFINIZIONE 18. – Una funzione si chiama **iniezione** quando è iniettiva.

Graficamente (es.):

DEFINIZIONE 19. – Una funzione si chiama **suriezione** quando è suriettiva.

Graficamente (es.):

DEFINIZIONE 20. – Due insiemi si dicono **equipotenti** se hanno lo stesso “numero

di elementi”, cioè se esiste (almeno una) corrispondenza

biunivoca fra loro.

OSSERVAZIONE 7. – Le biiezioni possono servire per “contare” gli elementi di un

insieme (finito è ovvio, ma anche e soprattutto infinito! Cioè

controllare se due insiemi infiniti sono equipotenti).

DEFINIZIONE 21. – Sia $\varphi : A \rightarrow B$ una relazione di grafo F. Chiamiamo

relazione inversa di φ, scrivendo φ^{-1}, la corrispondenza che

ha come grafo il simmetrico F^{-1} del grafo F di φ. Cioè le

coppie (elementi) di un grafo hanno gli elementi ordinati in

modo inverso rispetto all’altro: se $(a,b) \in F$ allora $(b,a) \in F^{-1}$.

OSSERVAZIONI SUGLI INSIEMI INFINITI

Una notevole proprietà degli insiemi aventi un numero non finito di elementi è quella per cui l’insieme stesso si può mettere in corrispondenza biunivoca con un suo sottoinsieme proprio. Anzi questa proprietà viene spesso usata proprio per definire un insieme infinito.

La suddetta caratteristica può inizialmente sfuggire al senso comune poiché equivale a dire che esistono sottoinsiemi (ovviamente infiniti) di insiemi infiniti che hanno lo stesso “numero di elementi” del loro soprainsieme: sono, cioè, equipotenti ad esso (!).

L’esempio più famoso riguarda l’equipotenza fra l’insieme dei numeri razionali Q e il suo sottoinsieme proprio N dei numeri naturali (interi).

È molto facile, invece, trovare una biiezione tra l’insieme N dei numeri naturali e l’insieme dei numeri pari (o dispari). Basta infatti associare ad ogni intero il suo doppio per convincersi che la suddetta biiezione esiste: essa infatti non tralascia alcun numero intero, poiché tutti hanno un doppio, e, viceversa, ad ogni numero pari è associabile la sua metà.

Graficamente (Eulero-Venn):

A.2.5. CRITICA ALLA TEORIA INTUITIVA (ANTINOMIA DI RUSSELL)

Su base “ingenua” o intuitiva è possibile (come si è visto) costruirre la teoria degli insiemi, come è stato fatto da Cantor e da altri matematici.

In tal modo si può edificare buona parte della matematica nota, tuttavia ci si espone a diversi rischi di cui i più conosciuti sono le definizioni impredicative e le antinomie.

Una definizione si dice *impredicativa* se essa presenta un *vizio di circolarità*, cioè se l’ente da definire viene definito mediante se stesso. Non discutiamo le implicazioni filosofiche di questo modo di procedere, ma ci limitiamo ad osservare che dal punto di vista logico una tale definizione non soltanto è inutile, ma può addirittura essere dannosa, in quanto pur non essendo di per sè contraddittoria, può condurre a contraddizioni.

Il primo tentativo di Cantor fu quello di definire ciò che si intende per "*insieme*", ma finiva, in un modo o nell'altro, col dare definizioni impredicative, come, ad esempio, la seguente:

"*Insieme è un* aggregato *di oggetti, della nostra esperienza o della nostra intuizione, concepito come un tutto unico*"

in cui la parola "*insieme*" è definita mediante il suo sinonimo *aggregato*.

C'è però, nella definizione sopra riportata, qualcosa da porre esplicitamente in luce, come un presupposto essenziale della teoria degli insiemi, e precisamente:

"*Qualunque sia la natura degli enti che costituiscono un insieme, questo è sempre un ente astratto*".

Ponendo la questione in termini più precisi, ci si accorge che l'idea alla base del concetto di insieme è la seguente: *ogni volta che si enuncia un predicato P(x), contenente una variabile libera x, l'*estensione *di questo predicato (cioè la totalità degli x che lo soddisfano) è un insieme.*

Da una tale indiscriminata applicazione dei predicati nasce l'inconveniente più serio della teoria intuitiva; si hanno cioè le contraddizioni.

Tra esse la più famosa (anche se non la prima storicamente), è l'**antinomia di Russell**, che ora viene esposta.

Si ricordi, innanzitutto, che in un sistema formale contenente una antinomia o contraddizione, ogni enunciato risulta valido e non valido allo stesso tempo.

Ciò premesso, ed accettata l'esistenza di insiemi in corrispondenza ad ogni possibile predicato, possiamo suddividere gli insiemi ("tutti"?!!? gli insiemi) in due insiemi (o, meglio, "famiglie" di insiemi) A e B non vuoti e privi di elementi comuni, formati rispettivamente da:

a) gli insiemi che sono elementi di se stessi; in simboli:

$A = \{ X / X \in X \}$;

b) gli insiemi che non sono elementi di se stessi; in simboli:

$B = \{ X / X \notin X \}$.

L'insieme dei concetti astratti è un concetto astratto, quindi è del primo tipo. L'insieme dei numeri naturali (che non è un numero naturale) è del secondo tipo, come pure l'insieme dei cani (che non è un cane!).

Avendo così assegnato un predicato ben definito "*essere elemento di se stesso*", possiamo affermare che *esistono i due insiemi disgiunti* A *e* B *sopra considerati*.

Chiediamoci ora: l'insieme B è del primo o del secondo tipo? Supponiamo che sia $B \in B$: allora, per la definizione di B, $B \in A$, cioè $B \notin B$; viceversa, supponiamo che $B \notin B$: allora, sempre per la definizione, $B \in B$: abbiamo quindi ottenuto una proposizione la cui falsità ne implica la verità e viceversa; questa proposizione risulta vera e falsa contemporaneamente e ciò è ovviamente inaccettabile.

Altre antinomie possono costruirsi considerando:

- *l'insieme di tutti i numeri cardinali;*

- *l'insieme di tutti i numeri ordinali.*

La seconda di esse è detta antinomia di Burali-Forti ed è stata la prima antinomia scoperta nella teoria degli insiemi.

Stabilita così l'esistenza di antinomie, per non rinunciare alla teoria degli insiemi, si poneva il problema di dare ad essa una nuova sistemazione.

Tra le diverse soluzioni proposte è da considerare quella di Zermelo e Fraenkel, per la quale non tutti i predicati portano all'esistenza di insiemi; esistono cioè alcuni predicati, come ad esempio "*essere elemento di se stesso*", che sono di "*estensione troppo vasta*" per costituire un insieme.

Le conseguenze di questo punto di vista sono:

a)–la rinuncia a definire esplicitamente un insieme;

b)–la costruzione di un sistema assiomatico in cui non si possono costruire insiemi "troppo ampi".

Poiché il termine *insieme* non può essere definito esplicitamente, gli assiomi posti alla base della teoria costituiscono una definizione implicita di insieme.

OSSERVAZIONE 8. Secondo Bernays, si chiamano *classi* le estensioni di predicati per le quali non è stato dimostrato che costituiscono un insieme, oppure si è provato che non lo sono. Ad esempio, si dice la classe di tutti i numeri ordinali, la classe di tutti gli insiemi equipotenti , la classe di tutti gli insiemi-coppia, ecc.

TEOREMA DI CANTOR

“Fra l’insieme I e l’insieme P(I) non esiste corrispondenza biunivoca: la potenza di P(I) è maggiore di quella di I”.

DIMOSTRAZIONE

La dimostrazione è immediata per insiemi finiti, infatti se la potenza di I è *n*, quella di P(I) é .

In generale si può ragionare per assurdo: se esistesse una biiezione fra i due insiemi, ogni elemento di I sarebbe “collegato” con un sottoinsieme di I che lo contiene (meglio: a cui appartiene) oppure che non lo contiene.

Chiamiamo “ordinario” ogni elemento di I del secondo tipo, “straordinario” ogni elemento del primo.

Esistono sicuramente elementi ordinari, poiché $\emptyset \in P(I)$ e la controimmagine di $\emptyset$ non potrà essere che un elemento ordinario.

Analogamente esistono certamente elementi straordinari, poiché $I \in P(I)$, quindi la controimmagine di I (tramite la supposta biiezione) dovrà essere un elemento straordinario. Abbiamo individuato così una partizione di I.

Consideriamo ora il sottoinsieme A di I (A ∈ P(I)) formato da tutti gli elementi ordinari.

Chiamiamo *x* (elemento di I) la controimmagine di A. Ci chiediamo: *x* è ordinario o straordinario?

1°) Se *x* fosse ordinario dovrebbe appartenere ad A, per la definizione di A stesso. Ma questo implicherebbe *x* straordinario: contraddizione!

2°) Se *x* fosse straordinario dovrebbe appartenere ad A, poiché è a lui collegato, ma ciò è ancora una contraddizione, infatti A è l'insieme degli elementi ordinari!

In conclusione si deduce che la biiezione in questione non esiste e si prova la tesi.

Per chiudere completamente il discorso si osservi che si può sempre stabilire una corrispondenza biunivoca fra I ed un sottoinsieme "proprio" di P(I) associando ad ogni elemento di I il sottoinsieme unitario da lui formato. Resta quindi provato che la potenza di I è minore di quella di P(I) c.v.d.

A.2.6. SPAZI METRICI

DEFINIZIONE 22 - Un qualsiasi insieme **S**, nel quale si possa concepire una ***distanza*** [4] fra due qualsiasi dei suoi elementi (punti) lo chiameremo **spazio metrico** (ambiente).

N.B. Nella nostra trattazione della teoria insiemistica, non potendo, per ovvi motivi, né spaziare né approfondire troppo in alcuni concetti, si è dato per acquisito il concetto di "ordine" (vedi comunque "RELAZIONI IN UN INSIEME", Appendice 3), necessario per la rappresentazione dei numeri reali o iperreali su una retta. Crediamo altresì che il lettore possa seguire la trattazione senza troppa difficoltà poiché si è cercato di armonizzare i contenuti e razionalizzarne la loro sequenza.

Esempio.

S = ℜ × ℜ $d(x,y)$ = a

(distanza euclidea nel piano cartesiano)

A.2.7. INTORNI SFERICI (CIRCOLARI). INSIEMI APERTI E INSIEMI CHIUSI

DEFINIZIONE 23 - Si definisce **intorno circolare** di un certo punto C, l'insieme dei punti tali che la loro distanza da C sia minore di un certo numero iperreale r (r ³ 0). Cioè d(P,C) < r, dove P è un qualunque punto dell'intorno.

OSSERVAZIONE 9. Si è qui sottinteso di prendere in considerazione insiemi di "punti" su un piano cartesiano (o su uno spazio ad n dimensioni): ciò equivale, comunque come è ormai chiaro, a considerare coppie ordinate di numeri iperreali (o n.uple di numeri iperreali) o in particolare reali. Questa equivalenza è molto utile nell'analisi matematica, soprattutto nello studio delle funzioni e nel tracciamento dei loro grafici.

Es. (Def. 23):

Caso lineare

DEFINIZIONE 24 - Un punto P si dice **interno** ad un insieme E se esiste almeno un intorno sferico (se trattiamo spazi a più di due dimensioni: intorno lineare o segmento aperto, cioè che non comprende gli estremi, se siamo su una retta…!) di P che sia tutto contenuto in E.

Se $E \subseteq \Re^* \times \Re^*$ un punto P di E si dice interno ad E se esiste un intorno di raggio *r* infinitesimo positivo, di P, tutto contenuto in E.

Esempio grafico:

DEFINIZIONE 25 - Un insieme, tale che tutti i suoi punti siano interni, si chiama **aperto**. Il complementare di un insieme aperto in S (nostro "ambiente") è **chiuso**.

DEFINIZIONE 26 - I punti che non sono né interni né esterni ad un insieme si chiamano **punti di frontiera** dell'insieme stesso.

Esempio grafico:

OSSERVAZIONI 10, 11, 12.

- I punti di frontiera (di un insieme E) sono tutti e soli quei punti per cui ogni loro intorno contiene sia punti dell'insieme E sia punti del complementare di E. La frontiera di E si denomina con F(E).
- Un insieme chiuso contiene la sua frontiera.
- La frontiera di un insieme è un insieme chiuso[5].

Esempio grafico:

S

$S \subseteq \Re^2 = \Re \times \Re$, oppure $S \subseteq \Re^{*2} = \Re^* \times \Re^*$, come ovviamente per tutti gli esempi di cui sopra.

Si osservi che i punti F_1 e F_2, se facessero parte di E sarebbero punti di frontiera, se non appartenessero ad E sarebbero punti esterni.

DEFINIZIONE 27 - Gli insiemi che contengono solo una parte della loro frontiera non sono **né aperti, né chiusi**. Vedasi esempio grafico alle osservazioni precedenti.

A.2.8. PUNTI INFINITAMENTE AVVICINABILI DI UN INSIEME

DEFINIZIONE 28 - Si dice **punto infinitamente avvicinabile di un insieme** (o anche **punto di accumulazione**) un punto tale che, preso un suo intorno di raggio infinitesimo positivo arbitrario, contiene infiniti punti dell'insieme stesso (o, in modo equivalente, "contiene almeno un punto dell'insieme stesso diverso da P").

Si noti che un punto di questo genere può anche non appartenere all'insieme considerato.

Un punto che non sia infinitamente avvicinabile si dice **punto isolato**.

Esempio:

L'insieme numerico (successione infinita di numeri iperrazionali) E = , con *n* numero naturale, ha 0 come punto (numero) infinitamente avvicinabile.

Infatti, per ogni iperintero positivo *H*, il termine corrispondente nella successione è infinitamente vicino a 0 dal momento che infinitesimo (*K* infinito).

Graficamente:

[1] N.B… Si può dimostrare che, se un insieme I ha un numero finito *n* di elementi, P(I) ha 2^n elementi.

[2] NB. In genere si indica con {a,b} un insieme formato da una coppia non necessariamente ordinata di elementi e con (a,b) una coppia ordinata.

[3] N.B. Si noti la differenza fra GRAFO e GRAFICO: il primo è un insieme, cioè un ente astratto, il secondo è un disegno!

[4] N.B. Lasciamo sviluppare al lettore il concetto di “distanza”. Si ricordi comunque che essa si può immaginare come **funzione** di una coppia di elementi dell’insieme S (caso bidimensionale) e l’insieme $\Re^+$: $f : (x,y) \rightarrow r$ con $(x,y) \in S \times S$, $r \in \Re^+$ (numeri reali positivi o nulli). Il tutto riportabile ai numeri iperreali.

[5] N.B. Il lettore provi, per esercizio (e per controllare se ha ben assimilato i concetti esposti!), a cercare delle dimostrazioni a quanto asserito.

A.3. RELAZIONI IN UN INSIEME

Dato un insieme non vuoto A, consideriamo le relazioni di A in se stesso o relazioni nell'insieme A.
Sappiamo che esse risultano determinate da un sottoinsieme del prodotto cartesiano (ordinato) A×A detto grafo.

Per indicare che due elementi x ed y nell'insieme A sono associati (o si corrispondono) nella relazione, che chiameremo $\Re$, scriveremo:

$$x \Re y$$

DEFINIZIONE 1. – Il sottoinsieme di A×A formato da tutte le coppie (x, x), cioè tali
che il primo ed il secondo elemento sono uguali, si chiama
diagonale e si indica con Δ.

DEFINIZIONE 2. – Sia $\Re$ una relazione nell'insieme non vuoto A avente grafo F.
Diciamo che la relazione $\Re$ è **riflessiva**, se ogni elemento x di A
è in relazione con se stesso, cioè se la diagonale D è contenuta
nel grafo F.

In simboli:

DEFINIZIONE 3. – Nelle stesse condizioni della definizione precedente diciamo che la relazione $\Re$ è **simmetrica**, se, ogniqualvolta l'elemento *x* è in relazione con l'elemento *y*, anche *y* è in relazione con *x*; cioè se il grafo F è simmetrico e quindi $\Re$ coincide con la sua inversa $\Re^{-1}$.

In simboli:

DEFINIZIONE 4. – Sempre nelle stesse condizioni diciamo che una relazione $\Re$ è
transitiva, se il fatto che *x* sia in relazione con *y* e *y* sia in relazione con *z* implica che *x* sia in relazione pure con *z*.

In simboli:

DEFINIZIONE 5. – Sempre nelle stesse condizioni diciamo che una relazione $\Re$ è
antisimmetrica, se il fatto che *x* sia in relazione con *y* e *y* sia in relazione con *x* implica che *x* sia uguale ad *y*; cioè l'intersezione tra il grafo F ed il suo simmetrico è contenuta nella diagonale Δ.

In simboli:

A.3.1. RELAZIONI DI EQUIVALENZA

DEFINIZIONE 6. – Sia A un insieme. Si chiama **relazione di equivalenza** in A
ogni relazione che goda delle proprietà **riflessiva**, **simmetrica** e **transitiva**.

DEFINIZIONE 7. – Siano A un insieme e $\Re$ una sua relazione di equivalenza. Dato
un elemento *a* appartenente ad A, si chiama **classe di equivalenza** determinata da *a*, e si scrive {*a*}, l'insieme degli
elementi *a'* di A equivalenti ad *a*, cioè tali che sia *a* $\Re$ *a'*.

In simboli:

$$\{a\} =_{\text{def}} \{a' \,/\, (a, a') \in \text{F}\}\ \text{, dove F è il grafo di } \Re.$$

DEFINIZIONE 7. – Nelle stesse condizioni si chiama **insieme quoziente** e si scrive
A/$\Re$, l'insieme delle classi di equivalenza di A:

PROPRIETÀ 1. – Ogni relazione di equivalenza nell'insieme A produce una
partizione di A e viceversa.

A.3.2. RELAZIONI DI ORDINE

DEFINIZIONE 8. – Siano A un insieme e $\Re$ una relazione di A in sé. Si dice che $\Re$
è una relazione di **preordine** se gode delle proprietà riflessiva e transitiva. Si dice poi che l'insieme A è preordinato.

DEFINIZIONE 9. – Una relazione di preordine è detta **relazione di ordine**, se per
essa vale pure la proprietà antisimmetrica. L'insieme viene quindi detto ordinato.

DEFINIZIONE 10. – Una relazione di ordine si dice **di ordine totale** se è definita per ogni coppia dell’insieme A, **di ordine parziale** se
essa è definita soltanto per alcune coppie.
Analogamente per le relazioni di preordine.

DEFINIZIONE 11. – Se in una relazione di ordine $\Re$ risulta , per $a \in$A e $b \in$A, che
$a \Re b$ oppure $b \Re a$, si dice che a e b sono **confrontabili**,
altrimenti che a e b **non** sono **confrontabili**.

A.4. CALCOLO COMBINATORIO

A.4.1. GENERALITÀ

Se abbiamo *n* oggetti che indichiamo con una stessa lettera dell'alfabeto dotata di indice:

$$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{n-1}, a_n$$

e ci proponiamo di formare dei gruppi con tutti o parte di essi, i gruppi ottenuti potranno *differire sia per l'ordine* in cui sono distribuiti gli oggetti, *sia per la loro diversità.*

Gli oggetti, che spesso sono semplicemente numeri, si chiamano in generale **elementi**.

Lo studio dei vari raggruppamenti che si possono formare con un numero finito di elementi ed il modo di calcolare il numero dei raggruppamenti stessi prende il nome di ***calcolo combinatorio***.

Nota storica. Il calcolo combinatorio fu studiato già da **Galileo** (1564-1642), ma si sviluppò con **Pascal** (1623-1662) e con **Leibniz** (1646-1716) al quale è dovuta la denominazione **ars combinatoria**, ma fiorì con **Giacomo Bernoulli** (1654-1705).

A.4.2. PERMUTAZIONI

Si chiamano ***permutazioni semplici*** *o semplicemente* ***permutazioni****, tutti i possibili gruppi che si possono formare con la totalità degli elementi dati, tutti distinti, in modo tale che due qualsiasi di questi gruppi differiscano fra loro soltanto per l'ordine degli elementi stessi*.

Si nota che il numero delle permutazioni è uguale a quello di tutti gli ordinamenti possibili degli n oggetti considerati.

Per calcolarne il numero basta pensare ad n caselle in sequenza da riempire con gli n oggetti.
La prima casella può ospitare uno qualunque degli oggetti e quindi ha n possibilità di essere riempita, la seconda ne ha $n - 1$, … , l'ultima ne ha esattamente 1.
Il totale si ha moltiplicando i numeri da 1 a n , infatti per ogni situazione della prima casella se ne hanno $n - 1$ della seconda e così via.
Indicando con P_n il numero delle permutazioni di n oggetti si ha quindi:

$$\boxed{P_n = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}$$

che si può scrivere, applicando la proprietà commutativa:

$$P_n = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-3) \cdot (n-2) \cdot (n-1) \cdot n$$

e si deduce che : *il numero delle permutazioni semplici di n elementi è uguale al prodotto dei primi n numeri interi*.

Questo prodotto si indica con in simbolo $n!$, che si legge "*n fattoriale*".
Si scrive quindi, usualmente:

$$\boxed{P_n = n!}$$

Dall'essere $n! = (n - 1)!\, n$ si deducono le relazioni:

$$\frac{n!}{(n-1)!} = n \text{ e}$$

che non sarebbero possibili per $n = 0$ (per $n = 1$ è chiaro che $1! = 1$; infatti se ho 1 solo oggetto lo posso ordinare in un modo solo). Si è convenuto, però, di porre $0! = 1$. Vedremo più avanti l'utilità di questo.

ESEMPIO.

Calcolare in quanti modi posso assegnare le maglie a 11 calciatori.
Soluzione. $P = 11\,! = 39.916.800$.
L' "enormità" (imprevista per i più) del risultato ben giustifica l'esclamativo adottato per il fattoriale !!!

Se gli elementi possono essere ripetuti quante volte si voglia, parleremo di ***permutazioni con ripetizione*** : *sono tutte le permutazioni in cui ogni elemento si può ripetere quante volte si vuole, ma, ovviamente, non più di n volte.*

Per la ricerca del loro numero, indicato con P , ragionando come sopra, ogni posizione può essere occupata in n modi, quindi :

$$\boxed{P = n}$$

ESEMPIO.

Quanti numeri di 3 cifre posso formare con le cifre "1,2,3" ?
Soluzione: $P = 3^3 = 27$.

A.4.3. DISPOSIZIONI

Si chiamano ***disposizioni semplici*** *o semplicemente* ***disposizioni*** *di n elementi a k a k, o di classe k, con k n, tutti i possibili gruppi che si possono formare con k degli n elementi dati, tutti distinti, tali che due* *qualunque di questi gruppi differiscano fra loro per qualche elemento o per lo meno per l'ordine degli elementi stessi.*

Ragionando ancora come prima, pensiamo di "riempire" k caselle con n oggetti in ogni modo possibile. Avremo n modi per la 1ª casella, $n - 1$ modi per la 2ª, … , $n - k + 1$ per l'ultima (la k.esima). Quindi, denotando con $D_{n,k}$ il numero delle suddette disposizioni semplici, avremo:

$$\boxed{D_{n,k} = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-k+2) \cdot (n-k+1)}$$

Possiamo perciò dire che: *il numero delle disposizioni semplici di n elementi di classe k è dato dal prodotto di k fattori interi, consecutivi e decrescenti, a partire da n.*

Tenendo conto del significato del fattoriale, si può anche scrivere (formula di **Newton**):

$$\boxed{D_{n,k} =}$$

Infatti $D_{n,k} = \ =$

$= (n - k+1) \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n$, c.v.d.

ESEMPIO.

Quante squadre di calcio di 11 giocatori (bravi ciascuno in ogni ruolo) posso formare con 18 calciatori a disposizione?
N.B.: Qui si intende che ogni squadra è diversa dall'altra, oltre che per i giocatori, anche per il ruolo che essi occupano.
Soluzione. Il portiere (maglia n. 1) può essere scelto su 18 atleti, il terzino destro su 17, … , l'ala sinistra sugli 8 rimasti. Quindi:
$D = \ = 1.270.312.243.200$,
numero enorme (che giustifica il fatto per cui ogni italiano ha la sua "Nazionale" !).

Se gli oggetti possono essere ripetuti, abbiamo la seguente definizione:

Si chiamano ***disposizioni con ripetizione*** *o* ***complete*** *di n elementi a k a k, o di classe k, le disposizioni in cui ogni elemento si può ripetere quante volte si vuole, ma non più di k volte. Si indicano con D .*

Per la ricerca del loro numero, seguendo ancora il vecchio ragionamento, pensiamo di assegnare a ciascuna delle k caselle un elemento scelto sugli n dati. Per ogni casella ci sono quindi n possibilità. Da cui:

$$\boxed{D = n}$$

ESEMPIO.
Quanti numeri di tre cifre si possono formare in base dieci, tenendo conto dello zero anche come 1ª e/o 2ª cifra ?
Soluzione. $D = 10^3 = 1000$ (ovvio: da 0 a 999).

N.B. Le permutazioni con ripetizione sono un caso particolare delle analoghe disposizioni ponendo $k = n$.

A.4.4. COMBINAZIONI

Si chiamano ***combinazioni semplici*** *o semplicemente* ***combinazioni*** *di n elementi a k a k, o di classe k, con k n, tutti i possibili gruppi che si possono formare con k degli n elementi dati, tutti distinti, tali che due qualsiasi di questi gruppi differiscano almeno per un elemento.*
Si indicano con C oppure con (simbologia utilizzata per i coefficienti binomiali).

In pratica sono come disposizioni in cui non conta l'ordine e quindi i gruppi che contengono gli stessi elementi coincidono.
Basta quindi considerare quanti gruppi si possono formare con k elementi. Ma questo lo sappiamo: sono k ! .
Giungiamo alla conclusione che

$$D = k\,! \cdot C$$

da cui

$\boxed{C = \quad =}$

o meglio

$\boxed{C = \quad =}$

ESEMPIO.

Quante squadre di calcio di 11 giocatori posso formare con 18 calciatori a disposizione?
N.B.: Qui si intende che ogni squadra è diversa dall'altra se cambia almeno un giocatore.
Soluzione. $C = \quad = \quad = 31.824$.
Si chiamano ***combinazioni con ripetizione*** *di n elementi a k a k, o di classe k, le combinazioni in cui ogni elemento può ripetersi quante volte si vuole, ma non più di k volte. Si indicano con C .*

Il calcolo, in questo caso, è un po' laborioso.

Si consideri il numero totale t delle comparizioni di un elemento (per es. A) nell'insieme delle combinazioni. Per motivi di simmetria anche gli altri n – 1 elementi (B,C,…) compariranno t volte cosicché il totale di tutte le comparse è $t \cdot n$. Ma l'insieme di tutte le comparse si ottiene anche considerando che ogni combinazione contiene k comparizioni e le combinazioni sono C , ossia
$t \cdot n = k \cdot C$, da cui $t = \quad C$.
Ciò premesso, cerchiamo di ottenere t per altra via. Si considerino le combinazioni che contengono almeno una volta l'elemento A; esse si possono costruire aggiungendo A alle diverse successioni C , sia che queste

contengano o non contengano l'elemento A. Ma per la formula precedente l'insieme delle C contiene A per un totale di C , sicché

$$t = C + C = C$$

da cui

$$t = C = C$$

cioè

$\boxed{C = C}$

La formula è ricorrente. Per k decrescente l'ultimo termine è $C = C = n$. Allora

$$C = \cdot \cdot C$$

ed ancora:

$$C = \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot C$$

= . Infine:

$\boxed{C = = C}$

Possiamo quindi dire che: *il numero delle combinazioni con ripetizione di n elementi di classe k è uguale al numero delle combinazioni semplici di n + k – 1 elementi di classe k* (teorema di Frenicle – XVII secolo).

ESEMPIO.

Se si lanciano 3 dadi le configurazioni di punti diverse possibili saranno:

$$C = = 56.$$

A.4.5. COEFFICIENTI BINOMIALI

Come già si è accennato, le *C* si possono scrivere come (leggi: *n* su *k*) e prendono il nome di **coefficienti binomiali**. In questo simbolo *n* si chiama **ordine** e *k* si chiama **classe** o **indice.**
Questa terminologia è dovuta al fatto che i suddetti numeri si possono interpretare come i coefficienti delle sviluppo di (*a* + *b)* . Essi infatti sono uguali ai rispettivi elementi del triangolo di Tartaglia. Ciò lo si può provare tenendo conto delle seguenti proprietà (la cui dimostrazione si riduce ad una verifica di un'uguaglianza) :

1ª proprietà – dei termini complementari

Verifichiamo.

, c.v.d.

Osservazione. Se ho 18 calciatori posso fare tante squadre da 11 giocatori quante squadre da 7 (infatti, cambiando la squadra tramite qualche sostituzione cambia pure la panchina).

2ª proprietà – Teorema di Stiefel

Verifichiamo.

1° membro:

2° membro: =
= che è pure il 1° membro, c.v.d.

Osservazione. La costruzione del triangolo di Tartaglia segue proprio questa regola: ogni numero di una riga è uguale alla somma dei due adiacenti nella riga precedente.

3ª proprietà – di ricorrenza

Verifichiamo.

1° membro:
2° membro: , c.v.d.

N.B. Molti testi elencano pure la proprietà (che noi abbiamo già in pratica considerato citando Newton e che abbiamo utilizzato per le verifiche di cui sopra) di G. Stirling (sec. XVII):

A.4.6. BINOMIO DI NEWTON

Come già anticipato, la potenza del binomio si può scrivere (formula di Newton):

$(a + b) =$

In sintesi:

$(a + b) =$

N.B. Qui si può osservare come la definizione 0! = 1 sia utile. Infatti deve essere = 1 e quindi , da cui la giustificazione della nostra ipotesi 0! = 1 .

BIBLIOGRAFIA

Libri / pubblicazioni

A. ROBINSON, “Non Standard Analysis”, Princeton 1966.

G. LOLLI, “Metodi non-standard in analisi”, lezioni presso Università di Genova, 1978.

F. ARZARELLO, “Matematica dell’infinito” in due voll., CLU ed. 1980

R. COURANT–H. ROBBINS, “Che cos’ è la Matematica?”, Bollati–Boringhieri, Torino 2000.

L. ORIO, Quaderno CESEDI, Torino, “Ordini di grandezza assoluti in analisi matematica”, 2004.

Web

H.J. KEISLER, “Foundations of Infinitesimal Calculus”, Prindle, Weber

Schmidt Inc., Boston 1976 scaricabile da Università del Wisconsin.

KEITH D. STROYAN 1997 “Mathematical Background: Foundations of Infinitesimal Calculus” scaricabile da Università dello Iowa.

Analisi matematica non standard I

Responsabile della pubblicazione "Lorenzo Orio"

E-book pubblicato dall'autore

L'autore è utente del sito.