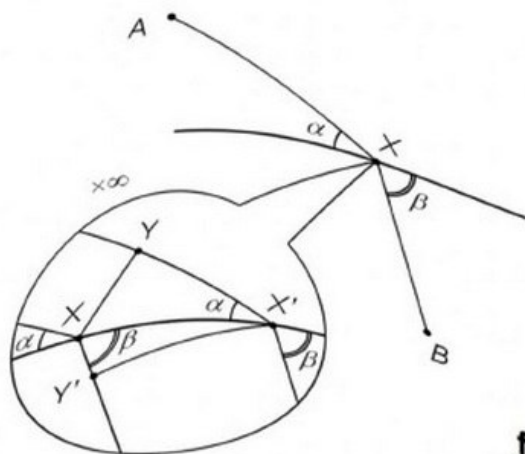


Il professor Apotema insegna...

I NUMERI IPERREALI



$$\frac{3\beta^2 + \beta^3 - 6\beta^4}{2\beta - \beta^5} \sim \frac{3\beta^2}{2\beta} = \frac{3}{2}\beta$$

$$\frac{\text{fni}}{\text{inn}} = 1$$

$$\varepsilon + i\varepsilon^2$$

$$\text{st}(xy) = \text{st}(x)\text{st}(y)$$

Giorgio Goldoni

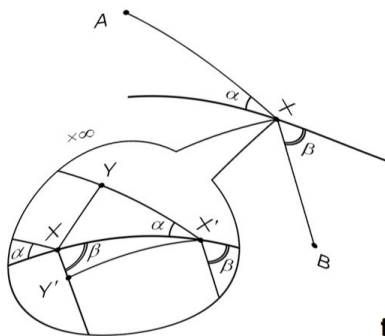
*Ciò che seminai nell'ira
crebbe in una notte,
rigogliosamente,
ma la pioggia lo distrusse.*

*Ciò che seminai con amore
germinò lentamente,
maturò tardi,
ma in benedetta abbondanza.*

Peter Rosegger

Il professor Apotema insegna ...

I NUMERI IPERREALI



$$\frac{3\beta^2 + \beta^3 - 6\beta^4}{2\beta - \beta^5} \sim \frac{3\beta^2}{2\beta} = \frac{3}{2}\beta$$

$$\frac{fni}{inn} = 1$$

$$\varepsilon + i\varepsilon^2$$

$$st(xy) = st(x)st(y)$$

Giorgio Goldoni

***realizzazione e impaginazione
a cura di Giorgio Goldoni
1^a edizione: Rolo, luglio 2011
2^a edizione: Modena, marzo 2014***

Dedico questo lavoro a tutti i miei studenti e, in particolare, a quelli che, a partire dall'a.s. 1993/1994, hanno sperimentato sulla loro pelle la mia scelta di insegnare il calcolo con gli infinitesimi e gli infiniti.

CONTENUTO DELLE LEZIONI

LEZIONE I.....pag.1

Problemi introduttivi all'uso degli infinitesimi e degli infiniti: ascissa del vertice della parabola, tangente a una parabola, cerchio osculatore al vertice della parabola.

LEZIONE II.....pag.12

Tangente a una cubica - Area di un triangolo parabolico - Dimostrazione visiva della formula per la somma dei primi n quadrati.

LEZIONE III.....pag.22

Postulato di Eudosso/Archimede - Microscopi, telescopi e zoom standard.

LEZIONE IV.....pag.32

Numeri e segmenti infinitesimi, infiniti, finiti e finiti non infinitesimi - Microscopi, telescopi e zoom non standard - Tipi di numeri iperreali - Comportamento dei tipi iperreali nell'addizione - Forme indeterminate.

LEZIONE V.....pag.44

Comportamento dei tipi iperreali nelle operazioni di sottrazione, moltiplicazione e reciproco - Forme indeterminate.

LEZIONE VI.....pag.53

Comportamento dei tipi iperreali nella divisione - Forme indeterminate - Confronto di infinitesimi.

LEZIONE VII.....pag.63

Confronto di infiniti - Numeri infinitamente vicini - Monadi e monade degli infinitesimi - Parte standard - Numeri finitamente vicini - Galassie e galassia dei finiti.

LEZIONE VIII.....pag.74

Confronto di infinitesimi - Proprietà della parte standard e analogie con la parte intera - Numeri indistinguibili.

LEZIONE IX.....pag.84

Sostituzione degli indistinguibili - Regole per semplificare un'espressione iperreale trasformandola in una indistinguibile -

LEZIONE X.....pag.93

Estensione iperreale di un insieme di numeri standard - Estensione iperreale di una funzione standard - Grafico della funzione parte standard - Numeri ipernaturali, iperinteri, iperrazionali e ipercomplessi.

LEZIONE XI.....pag.102

Visualizzazione di numeri ipercomplessi non-standard - Un problema di massimo risolto col calcolo iperreale e sua visualizzazione.

LEZIONE XII.....pag.114

Due problemi di minimo relativi alla propagazione della luce: la legge di riflessione e di rifrazione.

GLOSSARIO

PREMESSA

Conservo ancora i numeri di quel giornalino della mia infanzia dove usciva a puntate il racconto *Direzione Marte* e che aveva tra i suoi protagonisti il *Professor Apotema*. Ma ho già raccontato questa storia nel primo volume di questa collana e non voglio ripetermi.

Questo secondo volume contiene la premessa al calcolo differenziale e integrale con gli infinitesimi e gli infiniti: i numeri iperreali. Le lezioni qui tenute da Apotema sono la trasposizione delle mie lezioni sugli iperreali nella forma in cui si sono assestate negli ultimi anni, dopo un lungo, sofferto e solitario percorso didattico. Per me, specializzato in analisi matematica ed educato alla liturgia del numero $\varepsilon > 0$ piccolo a piacere e del corrispondente $\delta > 0$ sufficientemente piccolo, abbracciare la cosiddetta analisi non-standard (che preferisco chiamare col vecchio nome di calcolo infinitesimale) è stato quasi doloroso. Quasi un tradimento. Eppure, un giorno dell'ormai lontano anno scolastico 1993/1994, ho improvvisamente cambiato strada e, sbalordendo me stesso, ho iniziato la lezione con gli eretici infinitesimi! Da allora non sono più tornato indietro. Che cosa mi ha spinto a cambiare strada? Difficile persino per me capire cosa mi abbia fatto così repentinamente cambiare strada, senza un progetto e senza aver preparato del materiale! Forse un'improvvisa conversione. Del resto, le conversioni sono sempre improvvise e inaspettate, come la goccia che fa traboccare il vaso. E, proprio come la goccia che fa traboccare il

vaso, sono in realtà il risultato di un lungo stillicidio interiore, magari inconsapevole.

Credo di poter individuare due motivi fondamentali per giustificare questo passaggio dall'analisi matematica, basata sul concetto di limite, al calcolo infinitesimale, basato sul concetto di infinitesimo e di infinito. Un primo motivo è che l'analisi matematica, contrariamente a quanto accade per altri argomenti insegnati nella scuola superiore, viene proposta di colpo e, almeno idealmente, con la stessa impostazione dei corsi universitari. Da questo punto di vista, i testi scolastici sembrano imitare in tutto e per tutto i manuali universitari, magari con un po' più di figure e un po' meno dimostrazioni. Lo spirito è comunque sostanzialmente lo stesso. Lo studente dovrebbe imparare principalmente a usare e riconoscere in svariati problemi i concetti di derivata e di integrale e invece è oppresso dai teoremi sui limiti e dal calcolo dei limiti. Inoltre, invece di acquisire sicurezza coi casi "sani", viene introdotto subito alle situazioni "patologiche" nelle quali quel limite non esiste o quella funzione non è derivabile in quel punto o non è integrabile. Come se uno scolaro, nel suo primo approccio alla geometria, venisse subito avvisato del fatto che forse non esistono figure simili e che non è detto che per tre punti non allineati passi sempre una circonferenza, a meno che non si accetti deliberatamente l'unicità della parallela. Prima bisogna prendere molta confidenza con i casi "sani" e vedere molti problemi! Poi, forse, si potranno affrontare le "patologie"! Da questo punto di vista, credo che l'approccio con gli infinitesimi sia molto più diretto e intuitivo. Volete mettere a confronto due definizioni?

La funzione f è continua nel punto c se, comunque si fissi un errore positivo piccolo a piacere, esiste sempre una differenza positiva sufficientemente piccola tale che se x differisce da c , in valore assoluto, per meno di quella differenza, allora $f(x)$ differisce da $f(c)$, in valore assoluto, per meno di quell'errore.

La funzione f è continua nel punto c se quando x è infinitamente vicino a c , allora $f(x)$ è infinitamente vicino a $f(c)$.

Non si tratta soltanto della lunghezza (nella prima definizione se ho evitato l'uso di quantificatori e altri simboli matematici non è stato per allungarla in modo disonesto, ma solo per esplicitarne completamente il significato!), ma anche del tipo di approccio. La prima definizione richiede di ragionare "a

rovescio", mentre la seconda definizione è diretta.

Ma c'è un secondo motivo che mi ha spinto a questo cambiamento: il fascino dei metodi infinitesimali, che l'analisi di Cauchy e Weierstrass ha letteralmente ucciso. Solo nei corsi di fisica questi metodi sono sopravvissuti, consentendo agli studenti universitari di ritrovare la bellezza di quello che fu chiamato il calcolo sublime. E dovremmo chiederci seriamente il perché! Forse il motivo è che l'analisi matematica, col suo concetto di limite, che puzza di verifica e che non consente di indovinare il risultato (se non abbracciando lo stato schizofrenico permanente, che fu già di Archimede, di intuire e indovinare ogni volta con gli infinitesimi e gli infiniti e tradurre poi il tutto nel linguaggio $\varepsilon - \delta$), non consentirebbe mai di arrivare a scrivere le equazioni che stiamo cercando!

Oggi (50 anni fa!) è stato dato un fondamento sicuro ai metodi infinitesimali. Perché non cogliere questa formidabile occasione? Questo non significa certo dover insegnare i fondamenti dell'analisi non-standard nella scuola superiore! E nemmeno usare il livello di rigore di un corso universitario! Significa invece trasmettere ai nostri ragazzi la bellezza e la potenza dei metodi infinitesimali. È stato usando gli infinitesimi e gli infiniti che i matematici del '700 hanno sviluppato il calcolo differenziale e integrale e persino le equazioni differenziali alle derivate parziali, risolvendo una quantità incredibile di problemi prima inabbordabili. L'analisi matematica dei vari Cauchy e Weierstrass, basata sul macchinoso concetto di limite, sbarazzandosi degli infinitesimi e degli infiniti non si è semplicemente liberata di concetti divenuti ormai inutili, ma ha finito col recidere le radici stesse che l'avevano alimentata e fatta crescere rigogliosamente. Robinson, con la sua analisi non-standard, ha risanato definitivamente i metodi infinitesimali e ci ha liberato per sempre dall'amara medicina del concetto di limite!

Spero che queste lezioni sui numeri iperreali, e quelle che seguiranno sul calcolo differenziale e integrale, possano dare un piccolo contributo al formarsi di una nuova didattica del calcolo infinitesimale.

A handwritten signature in black ink, reading "Giorgio Goldoni". The script is fluid and cursive, with the first letters of the first and last names being capitalized and prominent.

GLOSSARIO

Estensione iperreale di una funzione standard

Estensione di una funzione standard, definita sull'estensione iperreale del suo dominio.

Estensione iperreale di un insieme di numeri standard

Insieme associato a ogni insieme standard e formato dai numeri iperreali che soddisfano le stesse condizioni che definiscono l'insieme dato.

Funzione standard

Funzione definita su un insieme di numeri reali a valori reali.

Galassia

Insieme di numeri a distanza finita tra loro. La galassia di un numero x , indicata con $Gal(x)$, è l'insieme dei numeri a distanza finita da x .

Galassia principale

Galassia dello zero, che coincide con l'insieme dei numeri finiti.

Microscopio non-standard

Strumento ottico ideale che, puntato sulla retta o sul piano o nel campo visivo di un altro strumento ottico, fornisce un'immagine ingrandita un numero infinito arbitrario di volte.

Microscopio standard

Strumento ottico ideale che, puntato sulla retta o sul piano o nel campo visivo di un altro strumento ottico, fornisce un'immagine ingrandita un numero finito arbitrario di volte.

Monade

Insieme di numeri infinitamente vicini tra loro.

Monade principale

Monade dello zero, che coincide con l'insieme dei numeri infinitesimi.

Numero finito

Numero in valore assoluto minore di almeno un numero

standard positivo e abbreviato con **f**.

Numero finito non infinitesimo

Numero in valore assoluto compreso tra due numeri standard positivi, abbreviato con **fni** e indicato con una lettera latina minuscola.

Numero infinitesimo

Numero in valore assoluto minore di ogni numero standard positivo, abbreviato con **i**.

Numero infinitesimo non nullo

Numero infinitesimo diverso da zero, abbreviato con **inn** e indicato con una lettera greca minuscola.

Numero infinito

Numero in valore assoluto maggiore di ogni numero standard positivo, abbreviato con **I** e indicato con una lettera latina maiuscola.

Numero iperintero

Numero che appartiene all'estensione iperreale dell'insieme dei numeri interi standard.

Numero ipernaturale

Numero che appartiene all'estensione iperreale dell'insieme dei numeri naturali standard.

Numero iperreale

Numero che appartiene all'estensione dei numeri reali che si ottiene aggiungendo un infinitesimo positivo ed estendendo le operazioni.

Numero standard

Numero reale

Parte infinitesima

A ogni numero finito viene associata la sua parte infinitesima, che è la differenza tra il numero e la sua parte standard.

Parte standard

Unico numero standard infinitamente vicino a un numero finito.

Segmento finito

Segmento minore di almeno un segmento standard

Segmento finito non infinitesimo

Segmento compreso tra due segmenti standard

Segmento infinitesimo

Segmento minore di ogni segmento standard

Segmento infinito

Segmento maggiore di ogni segmento standard

Segmento standard

Segmento la cui misura è espressa da un numero reale

Telescopio non-standard

Strumento ottico ideale che fornisce un'immagine di una porzione a distanza infinita di retta o di piano o del campo visivo di un altro strumento ottico nella stessa scala della porzione vicina.

Telescopio standard

Strumento ottico ideale che fornisce un'immagine di una porzione a distanza finita di retta o di piano o del campo visivo di un altro strumento ottico nella stessa scala della porzione vicina.

Zoom standard

Strumento ottico ideale che, puntato di solito sull'origine della retta o del piano o del campo visivo di un altro strumento ottico, fornisce un'immagine rimpicciolita un numero finito arbitrario di volte.

Zoom non-standard

Strumento ottico ideale che, puntato di solito sull'origine della retta o del piano o del campo visivo di un altro strumento ottico, fornisce un'immagine rimpicciolita un numero infinito arbitrario di volte.

LEZIONE I

Apotema:- Il prossimo argomento che affronteremo è il calcolo infinitesimale, un calcolo che fa uso di quantità infinitamente piccole, o infinitesime, e di quantità infinitamente grandi, o infinite. Dovremo quindi ricorrere a un insieme di numeri che comprenda numeri infinitesimi e numeri infiniti: i numeri iperreali. Prima di introdurre i numeri iperreali voglio però affrontare in modo informale alcuni problemi, allo scopo di farvi conoscere la cosa più importante e cioè lo spirito del calcolo infinitesimale. Cominciamo da un problema molto semplice di cui conoscete già la soluzione e cioè quello di determinare l'ascissa del vertice della parabola di equazione $y = ax^2 + bx + c$.

Guasty:- Il vertice ha ascissa $-\frac{b}{2a}$!

Apotema:- Bravo Guasty, ma adesso, più che al risultato, siamo interessati al metodo con cui ricavarlo: un metodo infinitesimale! Supponiamo di poter usare quantità infinitamente piccole e di avere a disposizione un potentissimo microscopio col quale visualizzarle. Per ora affidatevi alla vostra intuizione e non chiedetemi altro su queste quantità. Se puntiamo il nostro microscopio su un punto della parabola, ecco che il grafico risulta indistinguibile da un segmento rettilineo.

Scetty:- Ma non è esattamente rettilineo! Sembra!

Apotema:- Infatti non ho detto che è rettilineo, ma che risulta indistinguibile da un segmento rettilineo. Questo significa che, nel campo visivo del microscopio, le differenze tra il tratto infinitesimo di grafico e il segmento, risultano invisibili. In altre parole, esiste un segmento tale che le differenze di ordinata tra il grafico e quel segmento risultano infinitesime anche nella scala infinitesima del microscopio.

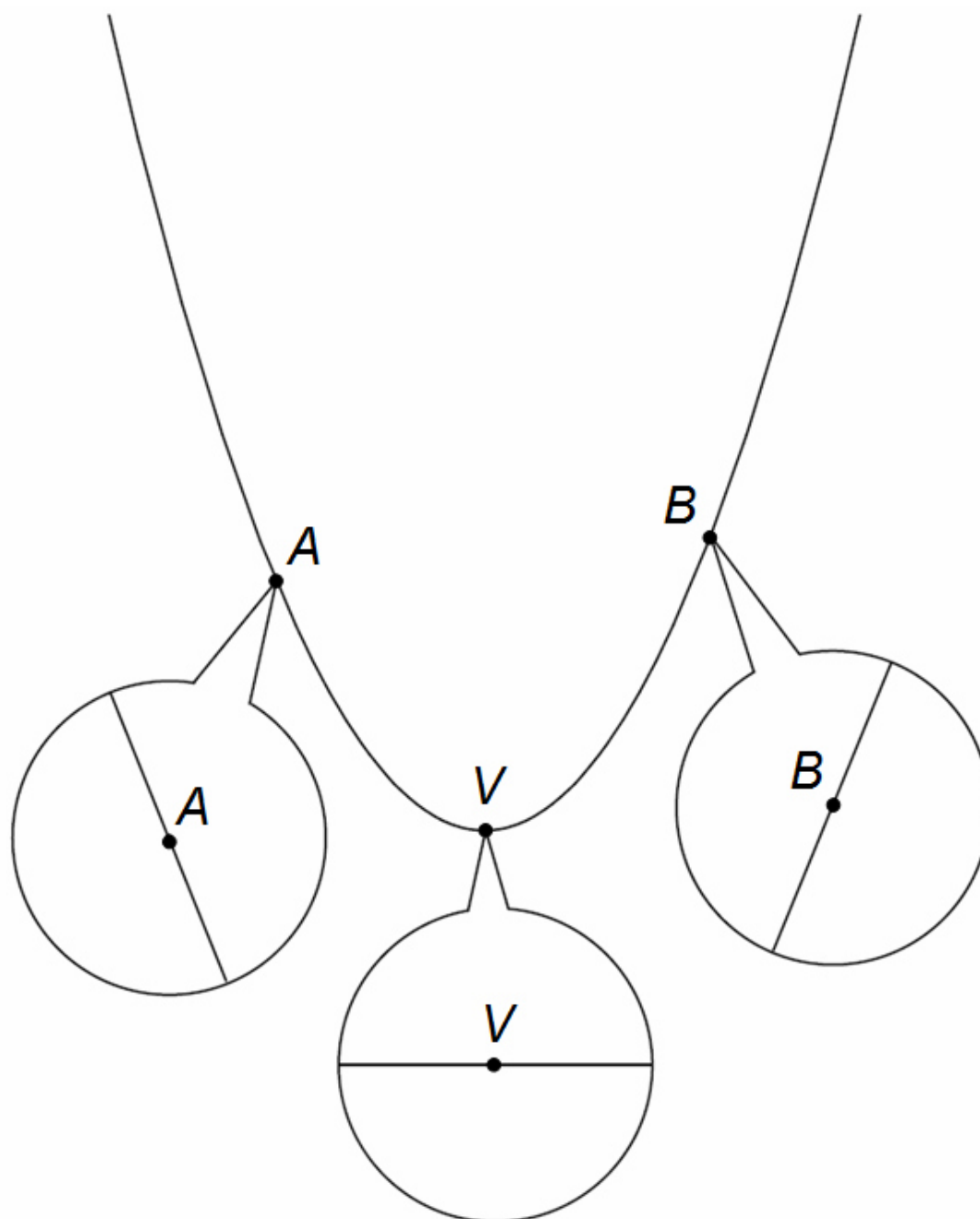
Sogny:- Vuol dire che si tratta di quantità che sono infinitamente piccole rispetto a un'altra a sua volta infinitamente piccola?

Apotema:- Proprio così!

Gioky:- Come i peli di un microbo?

Apotema:- Un'immagine un po' rozza, ma suggestiva! Diremo che la variazione in ordinata è un infinitesimo di ordine superiore

alla variazione in ascissa. Ma vediamo come queste osservazioni, apparentemente vaghe, ci conducano al risultato. Se puntiamo il microscopio in diversi punti del grafico, l'immagine al microscopio sarà quella di un segmento con una pendenza variabile. Il vertice della parabola è caratterizzato dal fatto di essere l'unico punto per il quale il microscopio ci mostra un segmento orizzontale. Usando il linguaggio precedente, questo significa che se ci spostiamo di un tratto infinitesimo dall'ascissa del vertice, allora la variazione di ordinata è un infinitesimo di ordine superiore allo spostamento infinitesimo in ascissa.



Gioky:- Se ci spostiamo in ascissa di un tratto lungo un microbo, allora la variazione in ordinata è di un pelo di microbo! Mentre in un punto diverso dal vertice sarebbe stata dell'ordine del microbo!

Apotema:- Vediamo di tradurre le considerazioni precedenti in un calcolo. Sia δ un numero infinitesimo. Calcoliamo ora la variazione di ordinata sulla parabola passando da x a $x + \delta$. L'ordinata corrispondente a $x + \delta$ è

$$a(x + \delta)^2 + b(x + \delta) + c = a(x^2 + 2x\delta + \delta^2) + bx + b\delta + c = \\ ax^2 + 2ax\delta + a\delta^2 + bx + b\delta + c.$$

Poiché l'ordinata corrispondente a x è $ax^2 + bx + c$, la variazione cercata è

$$ax^2 + 2ax\delta + a\delta^2 + bx + b\delta + c - (ax^2 + bx + c) = \\ = 2ax\delta + b\delta + a\delta^2,$$

che riscriviamo nella forma

$$(2ax + b)\delta + a\delta^2.$$

Che cosa mi dite del numero δ^2 ?

Svelty:- Beh, se δ è infinitesimo, allora sarà infinitesimo anche δ^2 ! Piccolissimo per piccolissimo fa piccolissimo!

Geny:- Anzi, è un infinitesimo di ordine superiore a δ , perché rapportato a δ dà $\frac{\delta^2}{\delta} = \delta$, che è infinitesimo. Dunque δ^2 non solo è infinitesimo, ma è addirittura infinitesimo anche rispetto all'infinitesimo δ ! -

Apotema:- Siccome $2ax + b$ e a sono numeri reali, ecco che il termine $(2ax + b)\delta$ è tot volte δ e quindi dello stesso ordine di δ , mentre $a\delta^2$ è tot volte δ^2 e quindi un infinitesimo dell'ordine di δ^2 . L'ascissa del vertice della parabola sarà allora quel numero x per il quale la variazione di ordinata $(2ax + b)\delta + a\delta^2$ conterrà soltanto il termine in δ^2 . Dovrà quindi essere nullo il termine in δ ed essere allora $2ax + b = 0$, da cui $x = -\frac{b}{2a}$!

Sogny:- Incredibile! Ha funzionato!

Apotema:- Passiamo a un altro problema. Trovare l'equazione della retta tangente alla parabola $y = x^2$ nel punto di ascissa $x_0 = 3$.

Normy:- Anche questo è un problema che sappiamo già risolvere!

Apotema:- Certamente, Normy, ma lo risolveremo ricorrendo agli infinitesimi. E vedremo che si tratta di un metodo molto più generale di quello che avevamo usato noi. Anzi, vieni alla lavagna a risolverlo col vecchio metodo.

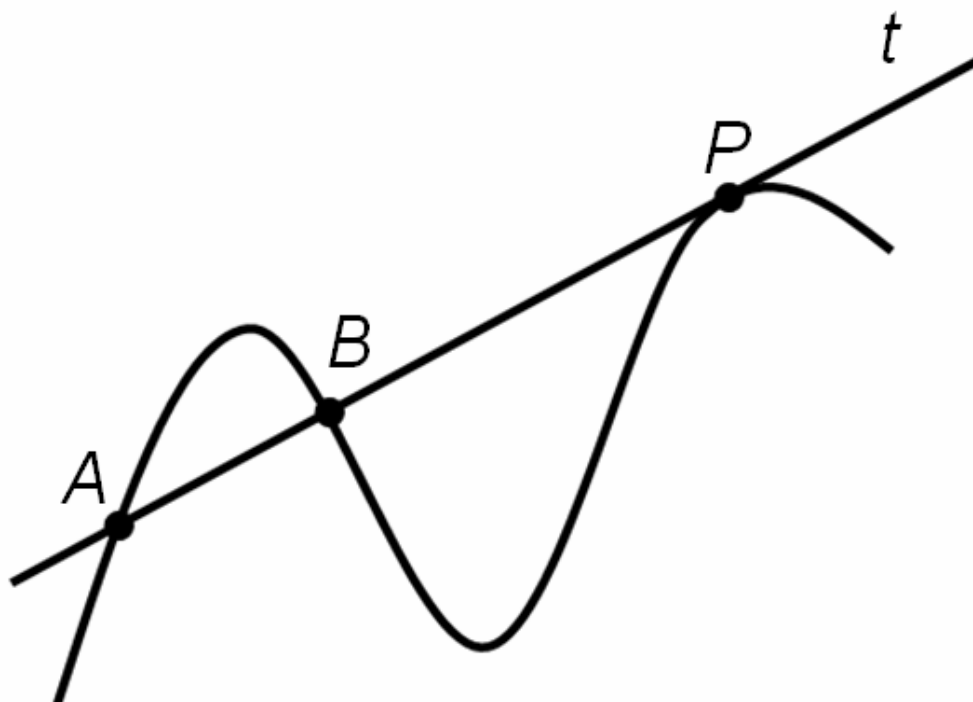
Normy:- Dobbiamo trovare l'equazione della retta tangente alla parabola $y = x^2$ nel punto di ascissa $x_0 = 3$.

Apotema:- Come definisci la retta tangente alla parabola in un suo punto?

Normy:- Come quella retta non parallela all'asse di simmetria, che ha un solo punto in comune con la parabola!

Apotema:- Benissimo, Normy. Ma ti faccio notare che si tratta di una definizione che va bene per la parabola e per altre curve convesse, ma che è del tutto insoddisfacente in generale.

(Apotema disegna il grafico di una funzione)



Per un grafico come questo, la tua definizione di tangente in un punto non funziona più! Quella che intuitivamente è la retta tangente al grafico in questo punto interseca il grafico anche in altri punti!

Normy:- E allora? Come si fa?

Apotema:- Ci penseremo dopo. Per ora procedi con la tua definizione e col vecchio metodo.

Normy:- Scrivo l'equazione di una generica retta passante per il punto della parabola $y = x^2$ di ascissa $x_0 = 3$... e quindi di ordinata $y_0 = x_0^2 = 9$... L'equazione è $y - 9 = m(x - 3)$. Si tratta di trovare il valore m della pendenza per il quale la retta ha una sola intersezione con la parabola.

Apotema:- E come si fa?

Normy:- Metto a sistema l'equazione della retta con quella della parabola e impongo che il sistema abbia una sola soluzione.

Il sistema è

$$\begin{cases} y = x^2 \\ y = 9 + m(x - 3) \end{cases}$$

Sostituisco, e arrivo all'equazione di secondo grado $x^2 = 9 + m(x - 3)$, che diventa

$$x^2 - mx + 3m - 9 = 0.$$

Il sistema ha una sola soluzione quando l'equazione ha una sola soluzione, e cioè quando il discriminante $\Delta = 0$.

Ora $\Delta = m^2 - 4(3m - 9) = m^2 - 12m + 36 = (m - 6)^2$ e $\Delta = 0$ per $m = 6$. La retta tangente è allora quella di pendenza 6 e quindi la retta di equazione $y = 9 + 6(x - 3)$ e quindi $y = 6x - 9$.

Apotema:- Molto bene, Normy. Ti faccio però notare che sei riuscito a risolvere il problema perché la parabola ha un'equazione di secondo grado. Se ti avessi chiesto di trovare una tangente anche soltanto alla cubica $y = x^3$, il metodo non avrebbe funzionato, perché avresti ottenuto un'equazione di terzo grado. Figuriamoci se ti avessi chiesto di trovare la tangente a una senoide! L'idea vincente è quella usata prima per determinare l'ascissa del vertice della parabola. Definiamo la retta tangente al grafico di una funzione in un suo punto come l'unica retta che, nel campo visivo di un microscopio che ci consente di vedere spostamenti infinitesimi, risulta indistinguibile dal grafico della funzione. In termini più precisi, si tratta dell'unica retta per la quale la differenza tra la sua ordinata e l'ordinata del grafico della funzione, calcolata per un valore di ascissa a distanza infinitesima dall'ascissa del punto di contatto, risulta essere un infinitesimo di ordine superiore all'incremento

infinitesimo in ascissa. Ma vediamo di fare il calcolo. Una generica retta per il punto $P_0(3,9)$ ha equazione $y = 9 + m(x - 3)$. Invece del punto di ascissa 3, consideriamo il punto di ascissa $3 + \delta$, dove δ è un numero infinitesimo. Quanto vale l'ordinata della retta in quel punto, Normy?

Normy:- Devo sostituire a x il valore $3 + \delta$ nell'equazione della retta.

Apotema:- Esatto.

Normy:- Mi viene ... $y = 9 + m(3 + \delta - 3) = 9 + m\delta$.

Apotema:- E qual è l'ordinata della parabola nel punto di ascissa $3 + \delta$?

Normy:- È $(3 + \delta)^2$, che fa $9 + 6\delta + \delta^2$.

Apotema:- Qual è allora la differenza delle ordinate?

Normy:- Devo fare l'ordinata della retta meno quella della parabola o viceversa?

Apotema:- È inessenziale: alla fine l'unica cosa che conta è individuare l'unico valore della pendenza per il quale questa differenza risulta un infinitesimo di ordine superiore a δ .

Normy:- Ok. Allora faccio

$$9 + 6\delta + \delta^2 - (9 + m\delta) = 6\delta + \delta^2 - m\delta.$$

Adesso ho capito! Lo riscrivo come

$$(6 - m)\delta + \delta^2$$

e impongo che si annulli la parte dello stesso ordine di δ ! Deve allora essere $6 - m = 0$ e quindi $m = 6$!

Apotema:- Bel colpo, Normy! Come vedete, abbiamo ritrovato lo stesso valore di pendenza di prima, ma senza scomodare le considerazioni sul discriminante di una equazione di secondo grado, che non sono applicabili al caso generale. Per casa, provate a calcolare l'equazione della retta tangente al grafico della cubica di equazione $y = x^3$ nel punto di ascissa $x_0 = 1$.

Normy:- Con questo metodo?

Apotema:- Ne conoscete forse un altro? Ma, prima di passare a un altro problema, rivediamo il calcolo precedente in un'ottica leggermente diversa. Se nel campo visivo del nostro potentissimo microscopio il grafico della parabola risulta indistinguibile dalla retta tangente, possiamo allora calcolare la

pendenza della retta che passa per il punto considerato e per un punto infinitamente vicino della parabola. Non troveremo così la pendenza della retta tangente, ma avremo commesso un errore infinitesimo e questo ci consentirà di trovare il valore di pendenza esatto. Oltre al punto $P_0(3, 9)$, consideriamo il punto P della parabola di ascissa $3 + \delta$, dove δ è un infinitesimo. L'ordinata di P è allora $(3 + \delta)^2 = 9 + 6\delta + \delta^2$. La pendenza del segmento P_0P è data dal rapporto tra la differenza delle ordinate e la differenza delle ascisse:

$$\frac{9 + 6\delta + \delta^2 - 9}{3 + \delta - 3} = \frac{6\delta + \delta^2}{\delta} = 6 + \delta.$$

Ma qual è l'unico numero reale a cui il numero $6 + \delta$ è infinitamente vicino?

(Quasi tutta la classe):- 6!

Apotema:- Ecco allora che 6 è il valore di pendenza cercato. Questo modo di procedere è tipico del calcolo infinitesimale. Si affronta un problema rinunciando a cercare una strada che conduca direttamente alla soluzione, ma seguendo un procedimento che è intrinsecamente approssimato e che comporta inevitabilmente un errore. Ma il procedimento è tale da condurre a un errore infinitesimo e il risultato esatto è l'unico numero reale che è infinitamente vicino al risultato approssimato ottenuto. Noi abbiamo rinunciato a determinare direttamente la pendenza della retta tangente, ma abbiamo scelto di calcolare la pendenza della retta che passa per il punto dato e per un punto della parabola a distanza infinitesima dal primo. Abbiamo così ottenuto un valore di pendenza approssimato, ma infinitamente vicino a quello cercato. Dall'espressione ottenuta è poi stato facile determinare l'unico numero reale infinitamente vicino al valore approssimato di pendenza ottenuto e quindi trovare il valore esatto della pendenza della retta tangente.

Dubby:- Possiamo vedere un altro problema?

Apotema:- Certo. La retta tangente è la retta che meglio approssima una curva in un suo punto. Possiamo allora chiederci qual è la miglior circonferenza che approssima una curva in un punto. Il significato è molto semplice. Se pensate la curva come la traiettoria di una automobilina che si muove nel piano, se immaginate di bloccare improvvisamente lo sterzo,

ecco che l'automobilina percorrerà una circonferenza. Si tratta della miglior circonferenza che approssima la curva in quel punto. Vi chiedo: qual è la circonferenza che meglio approssima la parabola $y = x^2$ nel suo vertice?

Geny:- Possiamo usare un metodo approssimato come quello usato per la tangente.

Scetty:- E cioè?

Geny:- Per due punti passa una e una sola retta e per tre punti non allineati passa una e una sola circonferenza. Possiamo prendere, oltre al vertice, altri due punti della parabola a distanza infinitesima dal vertice e determinare la circonferenza che passa per quei tre punti. Il centro e il raggio saranno infinitamente vicini al centro e al raggio della circonferenza cercata!

Apotema:- Vedo che hai colto al volo lo spirito del calcolo infinitesimale. Svelty, accendi il proiettore e prova a visualizzare il problema al Cabri.

Svelty:- Subito, prof!

Apotema:- Devi tracciare il grafico della parabola $y = x^2$ e prendere due punti P e Q vicini al vertice O . Per trovare il centro della circonferenza che passa per P , O , e Q cosa dovrai fare?

Svelty:- Dovrò trovare il punto di intersezione degli assi di due lati del triangolo POQ , per esempio gli assi di OP e OQ .

Furby:- Scommetto che il centro sta sull'asse y !

Apotema:- Furby ha subito intuito che, per questioni di simmetria, il centro della circonferenza deve stare sull'asse delle ordinate e quindi, per questa volta, ci basta prendere un solo punto P vicino al vertice. Per un punto che non sia il vertice è invece inevitabile dover ricorrere a due punti ausiliari.

Svelty:- Ecco disegnata la parabola $y = x^2$! Prendo un punto P qui sulla parabola... Mando l'asse di OP ... lo interseco con l'asse y ... e trovo il centro C ... e adesso disegno la circonferenza di centro C e raggio CO ...

Apotema:- Vedo che ti stai divertendo a muovere il punto P . Fermati un attimo! Porta P a una certa distanza... ecco... va bene così! E adesso avvicinalo lentamente all'origine usando l'animazione... così... piano... Vedete che la circonferenza prima è nettamente sbagliata, ma poi si adatta sempre meglio alla

parabola.

Svelty:- Sembra che il centro esatto sia a 0.5!

Apotema:- Vieni tu, Geny, a fare i calcoli alla lavagna.

Geny:- Il vertice è l'origine $O(0, 0)$. Prendo il punto P di ascissa infinitesima δ e quindi di ordinata δ^2 . L'asse di OP è il luogo dei punti di coordinate (x, y) che hanno ugual distanza da O e da P e quindi ha equazione

$$x^2 + y^2 = (x - \delta)^2 + (y - \delta^2)^2,$$

che diventa

$$x^2 + y^2 = x^2 - 2x\delta + \delta^2 + y^2 - 2y\delta^2 + \delta^4$$

e quindi

$$2x\delta + 2y\delta^2 = \delta^2 + \delta^4.$$

Per trovare l'intersezione con l'asse delle y devo porre $x = 0$ e ottengo quindi che deve essere $2y\delta^2 = \delta^2 + \delta^4$, da cui ricavo che

$$y = \frac{\delta^2 + \delta^4}{2\delta^2} = \frac{1}{2} + \frac{\delta^2}{2}.$$

Il valore esatto dell'ordinata del centro è l'unico numero reale infinitamente vicino a questo, e cioè $\frac{1}{2}$. Il centro è allora il punto

$C\left(0, \frac{1}{2}\right)$ e il raggio è $r = \frac{1}{2}$, per cui l'equazione della circonferenza cercata è

$$x^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2,$$

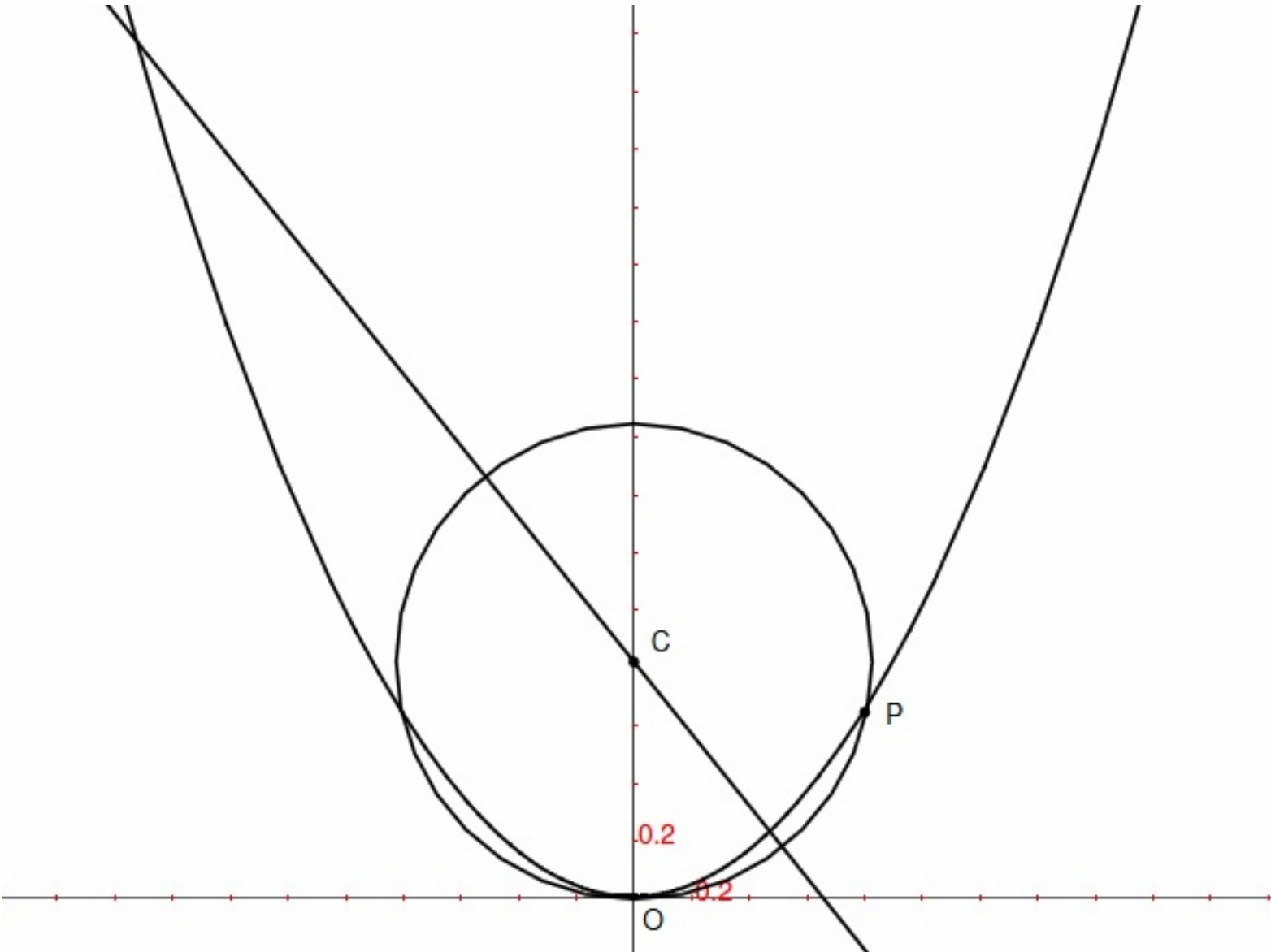
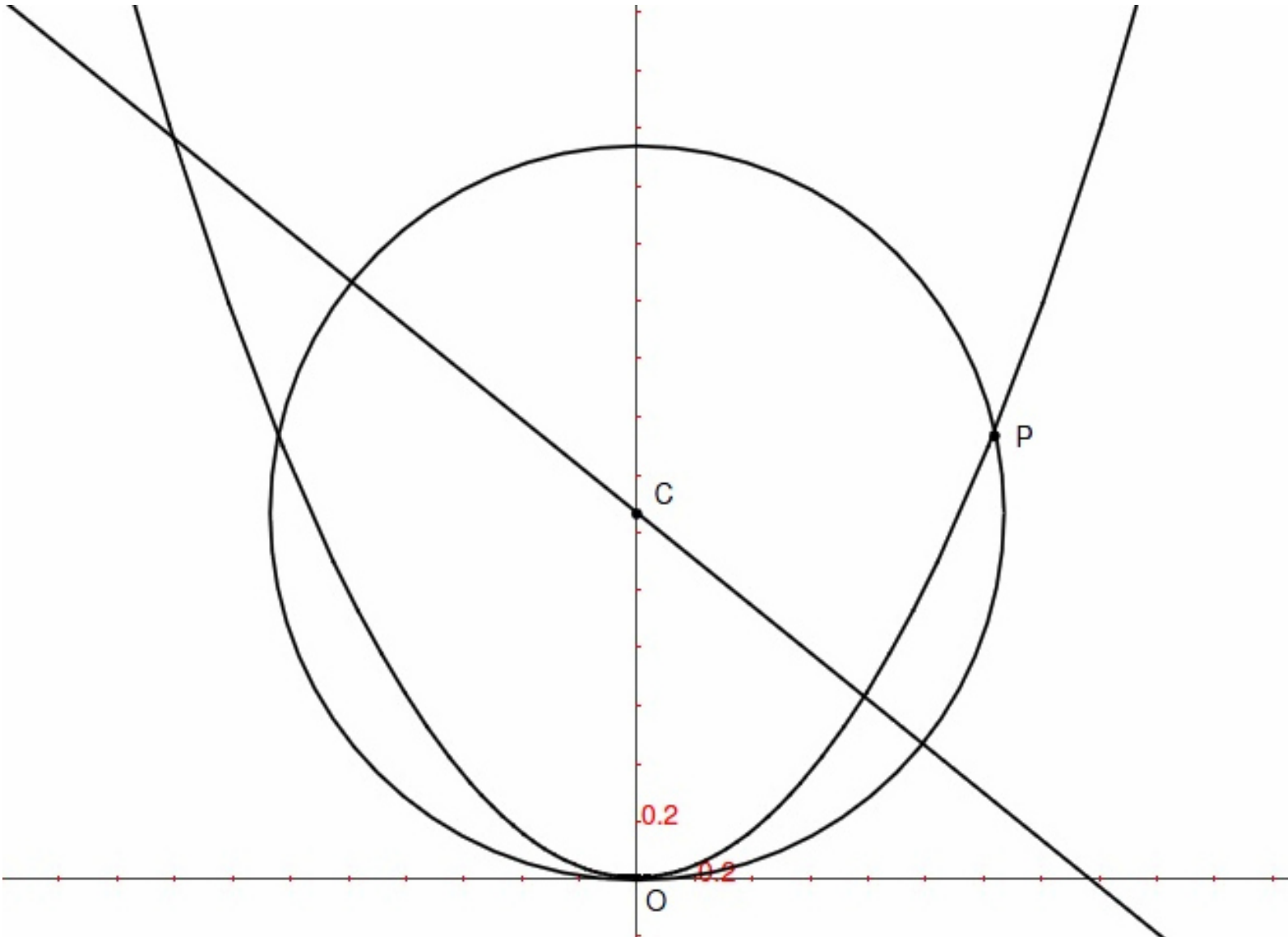
che diventa

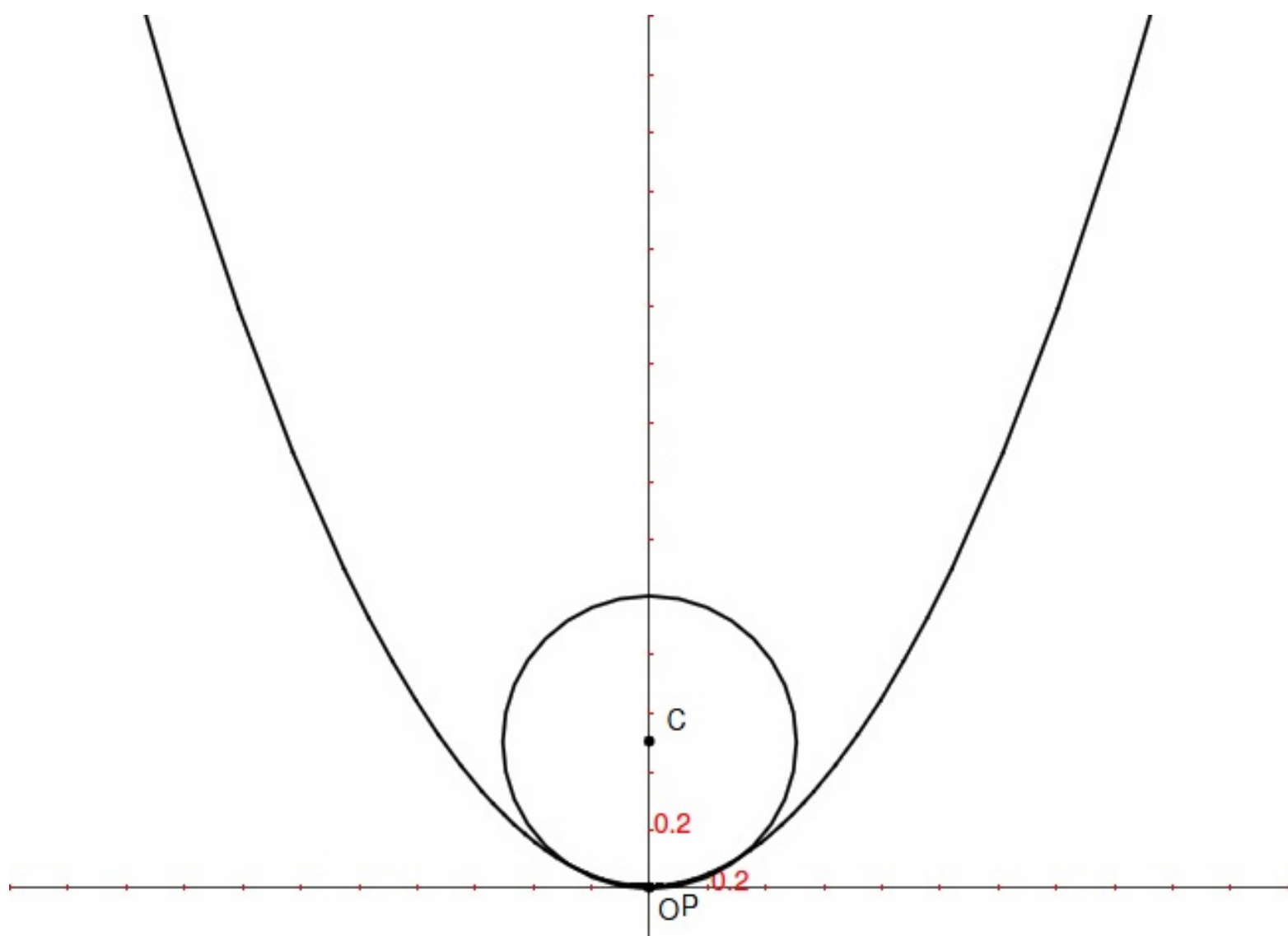
$$x^2 + y^2 - y + \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$$

e, infine

$$x^2 + y^2 - y = 0.$$

Svelty:- Allora avevo visto giusto!





Sekky:- Scusi, professore, ha un nome questa circonferenza?

Apotema:- Si chiama cerchio osculatore. Dovete sapere che nella letteratura matematica si fa un uso non sempre coerente dei termini cerchio e circonferenza.

Sekky:- Il fuoco della parabola $y = x^2$ ha ordinata $\frac{1}{4}$ e questo

mi ricorda una questione di ottica che abbiamo visto al biennio nel corso di fisica: uno specchio sferico si comporta circa come uno specchio parabolico avente il fuoco a una distanza pari alla metà del raggio.

Apotema:- Bravissimo Sekky! Di fatto abbiamo appena dimostrato questa proprietà degli specchi sferici. Ma ormai sta per suonare e continuiamo la prossima volta. Mi raccomando la tangente alla cubica!

LEZIONE II

Sekky:- Professore, posso venire io a correggere il compito per casa?

Apotema:- Certo, Sekky.

Sekky:- Dovevamo determinare l'equazione della retta tangente al grafico della cubica di equazione $y = x^3$ nel punto di ascissa $x_0 = 1$, usando il metodo infinitesimale. L'ordinata corrispondente a $x_0 = 1$ è $y_0 = x_0^3 = 1$ e una generica retta per il punto $P_0(1, 1)$ ha equazione $y - 1 = m(x - 1)$. Il problema è quello di determinare il valore di pendenza m che corrisponde alla retta tangente.

Apotema:- E qual è la definizione di retta tangente che hai utilizzato?

Sekky:- Se considero un valore di ascissa $x = 1 + \delta$, dove δ è un numero infinitesimo, allora la retta tangente è quella per la quale la differenza tra la sua ordinata e quella della cubica, calcolata in x , è un infinitesimo di ordine superiore a δ e cioè è infinitesima anche rispetto a δ .

Apotema:- Molto bene, Sekky.

Sekky:- Procedo coi calcoli, professore?

Apotema:- Senz'altro!

Sekky:- L'ordinata della retta in $1 + \delta$ è

$$y = 1 + m(1 + \delta - 1) = 1 + m\delta.$$

Quella della cubica è invece

$$(1 + \delta)^3 = 1 + 3\delta + 3\delta^2 + \delta^3$$

e la loro differenza è data da

$$1 + m\delta - 1 - 3\delta - 3\delta^2 - \delta^3 = (m - 3)\delta - 3\delta^2 - \delta^3.$$

Normy:- Anche io ho ottenuto lo stesso risultato! Ma questa volta c'è anche δ^3 e non sono riuscito ad andare avanti...

Apotema:- Qual è il problema rispetto ad avere soltanto δ^2 ?

Normy:- Abbiamo visto che δ^2 è un infinitesimo di ordine

superiore a δ , ma non abbiamo detto niente di δ^3 !

Sekky:- Secondo me δ^3 è pure un infinitesimo di ordine superiore a δ , perché $\frac{\delta^3}{\delta} = \delta^2$, che è un infinitesimo.

Svelty:- Addirittura è un infinitesimo di ordine superiore a δ^2 !

Gioky:- È una squama di un pelo di un microbo!

Apotema:- E quindi, che cosa concludi?

Sekky:- Affinché la differenza sia un infinitesimo di ordine superiore a δ , bisogna che il coefficiente di δ si annulli e quindi che sia $m - 3 = 0$. La pendenza della tangente è allora $m = 3$ e l'equazione della retta è $y = 1 + 3(x - 1)$, che diventa $y = 3x - 2$.

Apotema:- Siamo riusciti a trovare l'equazione della retta tangente senza dover scrivere un sistema tra l'equazione della retta e quella della cubica e imporre l'unicità della soluzione. Procedimento che sarebbe risultato molto difficile seguire, perché avrebbe condotto a un'equazione di terzo grado. Il metodo degli infinitesimi è dunque molto più generale. Ma vediamo ancora un ultimo problema prima di affrontare in modo sistematico l'argomento dei numeri iperreali: il calcolo dell'area di un triangolo parabolico.

Asy:- Un triangolo cosa?

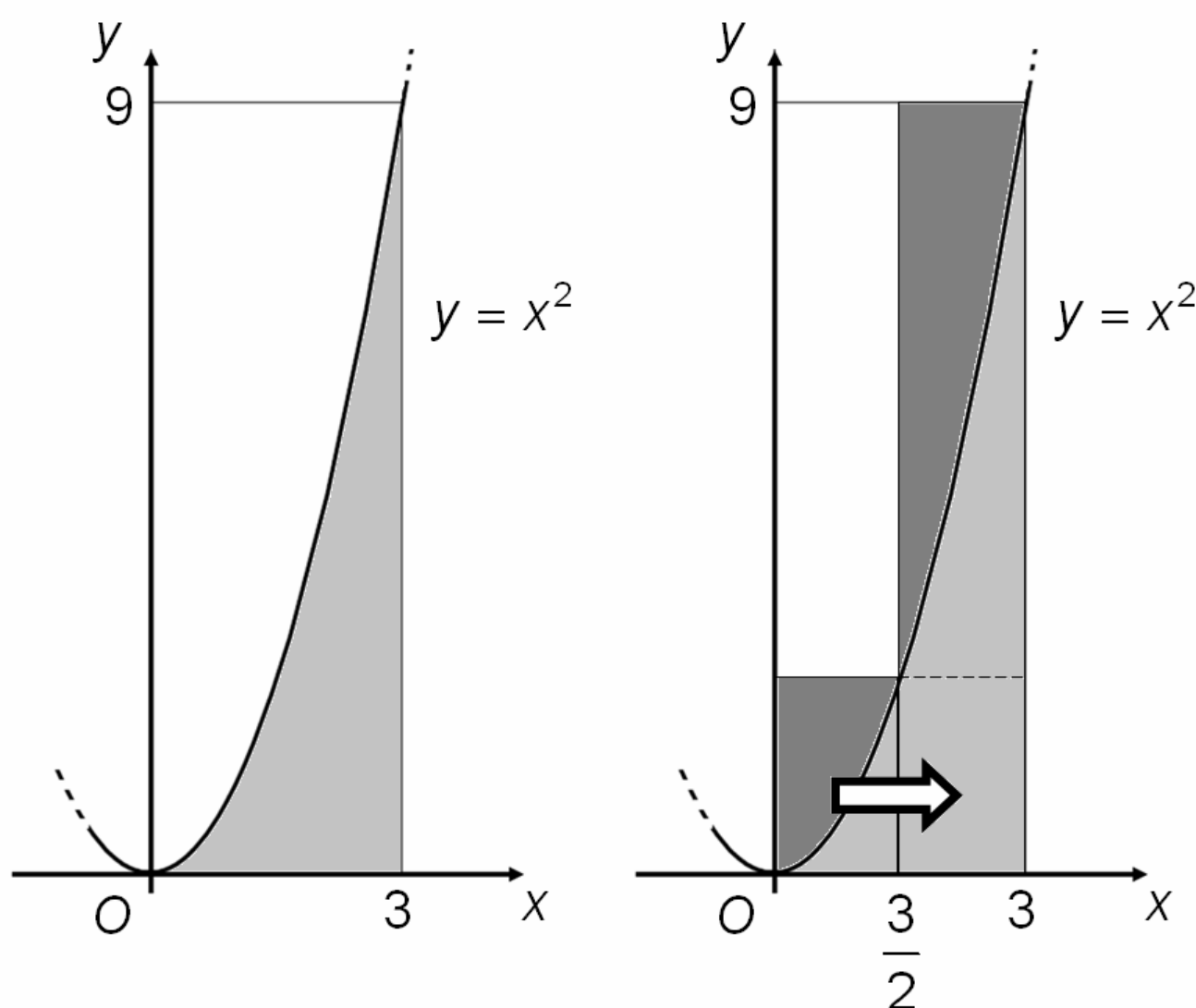
Rozzy:- Ha detto un triangolo parabolico, sordo!

Apotema:- Prendiamo la solita parabola di equazione $y = x^2$ e consideriamo il triangolo parabolico che consiste nella regione di piano compresa tra il grafico della parabola, l'asse delle ascisse e la retta $x = 3$. Qual è l'area di questa figura?

Bronty:- Mica facile...

Apotema:- Ancora una volta si tratta di un problema per il quale voler arrivare direttamente alla soluzione è impresa assai ardua. La filosofia del metodo infinitesimale è quella di rinunciare ad affrontare di petto il problema, ma di scegliere un metodo approssimato. Siccome per $x = 3$ l'ordinata della parabola è $y = 9$ e il triangolo parabolico è interno al rettangolo di base 3 e altezza 9, una prima grossolana stima consiste nell'affermare che l'area cercata è minore di 27. Si può fare di meglio e dividere l'intervallo $[0, 3]$ nei due intervalli di uguale ampiezza

$\left[0, \frac{3}{2}\right]$ e $\left[\frac{3}{2}, 3\right]$. Siccome l'ordinata della parabola per $x = \frac{3}{2}$ è $y = \frac{9}{4}$ e il triangolo parabolico è interno ai rettangoli aventi basi $\frac{3}{2}$ e altezze rispettivamente $\frac{9}{4}$ e 9, l'area cercata è minore di $\frac{3}{2} \cdot \frac{9}{4} + \frac{3}{2} \cdot 9 = \frac{27}{8} + \frac{27}{2} = \frac{135}{8} = 16.875$.



Se togliamo il secondo rettangolo e facciamo scorrere a destra il primo, vediamo che quest'ultimo è interno al triangolo parabolico e così troviamo che l'area cercata è maggiore di $\frac{27}{8} = 3.375$.

Dunque, per l'area A del triangolo parabolico abbiamo trovato la stima

$$3.375 < A < 16.875.$$

Ditemi voi adesso come si può migliorare ancora.

Svelty:- Dividiamo in 3 parti l'intervallo da 0 a 3! E poi in 4 parti, e così via!

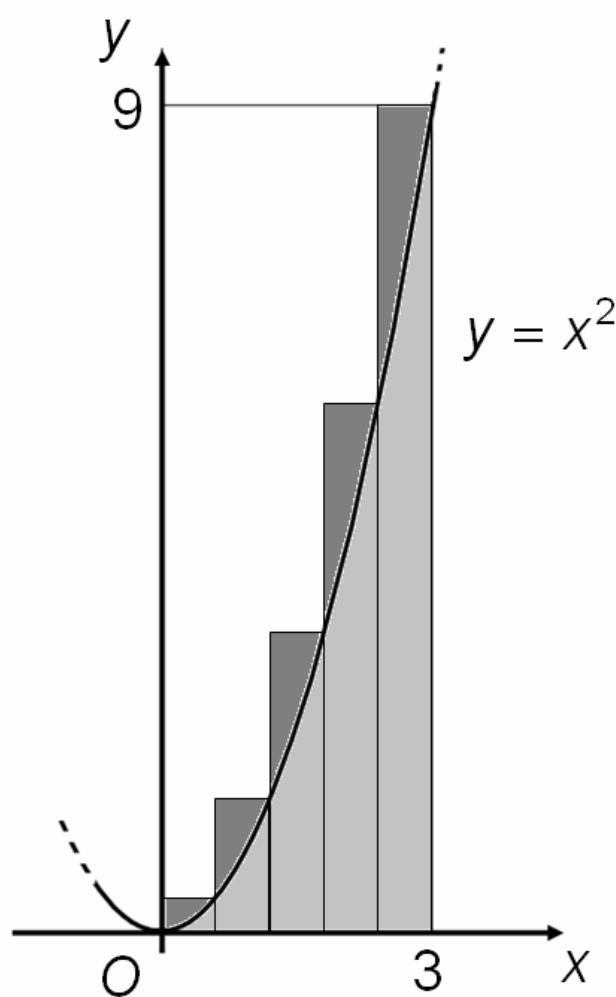
Scetty:- Ma così otteniamo sempre una stima per difetto e una per eccesso! Il solo risultato è quello di chiarire che stiamo definendo un ben preciso numero reale, ma non arriviamo mai a sapere esattamente quanto vale!

Apotema:- Vediamo di ricavare una formula generale nel caso di n suddivisioni uguali dell'intervallo $[0, 3]$. L'idea vincente sarà quella di passare a un numero infinito di suddivisioni!

Geny:- L'errore diventa infinitesimo perché è minore dell'area dell'ultimo rettangolo!

Normy:- Non capisco! Vai troppo in fretta, Geny!

Apotema:- Vieni alla lavagna e spiega le cose un passo alla volta, Geny!



Geny:- Divido l'intervallo da 0 a 3 in n intervallini uguali. Il triangolo parabolico è interno all'unione di tutti i rettangoli che hanno per basi gli intervallini e per altezze le ordinate della parabola negli estremi destri degli intervallini. L'area A del

triangolo parabolico è quindi minore della somma delle aree di tutti i rettangoli. Se tolgo l'ultimo rettangolo e sposto a destra di un posto tutti gli altri, questa volta l'unione di tutti i rettangoli rimasti è interna al triangolo parabolico e la somma delle loro aree dà una stima per difetto di A . La differenza tra la stima per eccesso e quella per difetto è data allora dall'area dell'ultimo rettangolo. Se prendo come stima dell'area il valore per eccesso, commetto allora un errore non più grande dell'area dell'ultimo rettangolo, che ha base $\frac{3}{n}$ e altezza 9 e quindi area

$\frac{3}{n} \cdot 9 = \frac{27}{n}$. Se prendiamo un valore infinito di n , allora il numero $\frac{27}{n}$ sarà infinitesimo!

Apotema:- Proprio così. Questo procedimento è affetto da un errore, ma l'errore può essere reso infinitesimo dividendo l'intervallo $[0, 3]$ in un numero infinito di parti. L'area cercata sarà allora il numero reale a cui è infinitamente vicina la somma delle aree degli rettangoli.

Dubby:- Il procedimento mi è chiaro, ma come si fa a calcolare l'area di quegli infiniti rettangoli? Mi sembra un'impresa impossibile!

Apotema:- Invece ci riusciremo. E ce lo mostrerà Geny, col vostro aiuto. E col mio.

Geny:- Allora ... divido l'intervallo $[0, 3]$ in n intervallini di uguale ampiezza. I punti di suddivisione sono allora in progressione aritmetica di ragione $\frac{3}{n}$. In particolare, gli estremi destri hanno

ascissa $\frac{3}{n}k$, con $k = 1..n$. Le ordinate della parabola in quei

punti, che sono le altezze dei rettangoli, valgono $\left(\frac{3}{n}k\right)^2$, con

$k = 1..n$. L'area del k -mo rettangolo vale allora $\frac{3}{n} \cdot \left(\frac{3}{n}k\right)^2$, che

fa $\frac{27}{n^3}k^2$. Si tratta adesso di sommarle tutte, per k che va da 1

a n . Il valore approssimato dell'area del triangolo parabolico, facendo n suddivisioni, è data allora dalla somma

$$\frac{27}{n^3}1^2 + \frac{27}{n^3}2^2 + \frac{27}{n^3}3^2 + \dots + \frac{27}{n^3}n^2.$$

Apotema:- Raccogli $\frac{27}{n^3}$.

Geny:- La somma delle aree dei rettangoli diventa allora

$$\frac{27}{n^3}(1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2).$$

Normy:- Spaventosa!

Apotema:- La si poteva ricavare al volo con una semplice considerazione geometrica. Invece dell'intervallo da 0 a 3, considerate l'intervallo da 1 a n . In questo caso, se lo dividiamo in n intervallini uguali, ogni intervallino ha ampiezza 1. I rettangoli hanno allora le basi uguali a 1 e le altezze sono semplicemente i quadrati dei numeri interi da 1 a n . La somma delle aree dei nuovi rettangoli risulta allora la somma dei primi n quadrati!

Dubby:- E quel $\frac{27}{n^3}$ da dove viene?

Apotema:- Occorre tenere presente che, nell'ultimo caso, il triangolo parabolico sta in un rettangolo di base n e altezza n^2 e quindi di area n^3 , mentre nel nostro caso sta in un rettangolo di base 3 e altezza 9, e quindi di area 27. L'area A del primo triangolo parabolico si ottiene da quella del secondo moltiplicando per il fattore $\frac{27}{n^3}$ e la stessa cosa accade per la somma delle aree dei rettangoli.

Geny:- Il problema è che non sappiamo quanto fa la somma dei primi n quadrati...

Apotema:- Vi dirò io che fa $\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Normy:- Significa che quella formula ci dà lo stesso numero che si ottiene sommando i primi n quadrati?

Apotema:- Esattamente. Per esempio, per $n = 5$ abbiamo che $1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 = 1 + 4 + 9 + 16 + 25 = 55$ e dalla formula

ricaviamo che $\frac{5(5+1)(2 \times 5+1)}{6} = \frac{5 \times 6 \times 11}{6} = 55$.

Scetty:- Ma da dove salta fuori quella formula?

Apotema:- Per adesso prendetela per buona e terminiamo il nostro calcolo. Poi ne vedremo una semplicissima e convincente dimostrazione! Continua pure, Geny.

Geny:- La somma delle aree degli n rettangoli può allora essere scritta nella forma

$$\frac{27}{n^3} \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{9(n+1)(2n+1)}{2n^2}.$$

Apotema:- E adesso... facciamo il salto! Vediamo cosa succede quando prendiamo un numero infinito N di rettangoli.

Sekky:- Useremo le lettere maiuscole per gli infiniti, professore?

Apotema:- Sì, ma non sarà certo passare da una minuscola a una maiuscola che ci farà trovare il risultato! Quando usiamo un numero infinito N di suddivisioni, qual è il numero reale a cui è infinitamente vicina l'espressione

$$\frac{9(N+1)(2N+1)}{2N^2} ?$$

Geny:- Mi viene da dire che quando N è infinito il risultato viene infinitamente vicino a quello che si otterrebbe mettendo N al posto di $N+1$ e $2N$ al posto di $2N+1$...

Apotema:- Hai detto bene! E che risultato ottieni?

Geny:- Il risultato è

$$\frac{9N(2N)}{2N^2} = 9.$$

La somma delle aree degli infiniti rettangoli è infinitamente vicina a 9, che è allora l'area del triangolo parabolico!

Svelty:- Un terzo dell'area del rettangolo!

Dubby:- Sembrava un calcolo impossibile da farsi!

Apotema:- Il problema è stato risolto ricorrendo ancora una volta a numeri infiniti e a numeri infinitesimi e calcolando in modo opportuno. Dopo questa carrellata di problemi introduttivi, siamo ormai pronti per affrontare l'argomento dei numeri iperreali.

Scetty:- E la formula per la somma dei primi n quadrati?

(Apotema accende il proiettore e si collega a Internet)

Apotema:- Vi voglio mostrare una dimostrazione visiva per la formula della somma dei primi n quadrati.

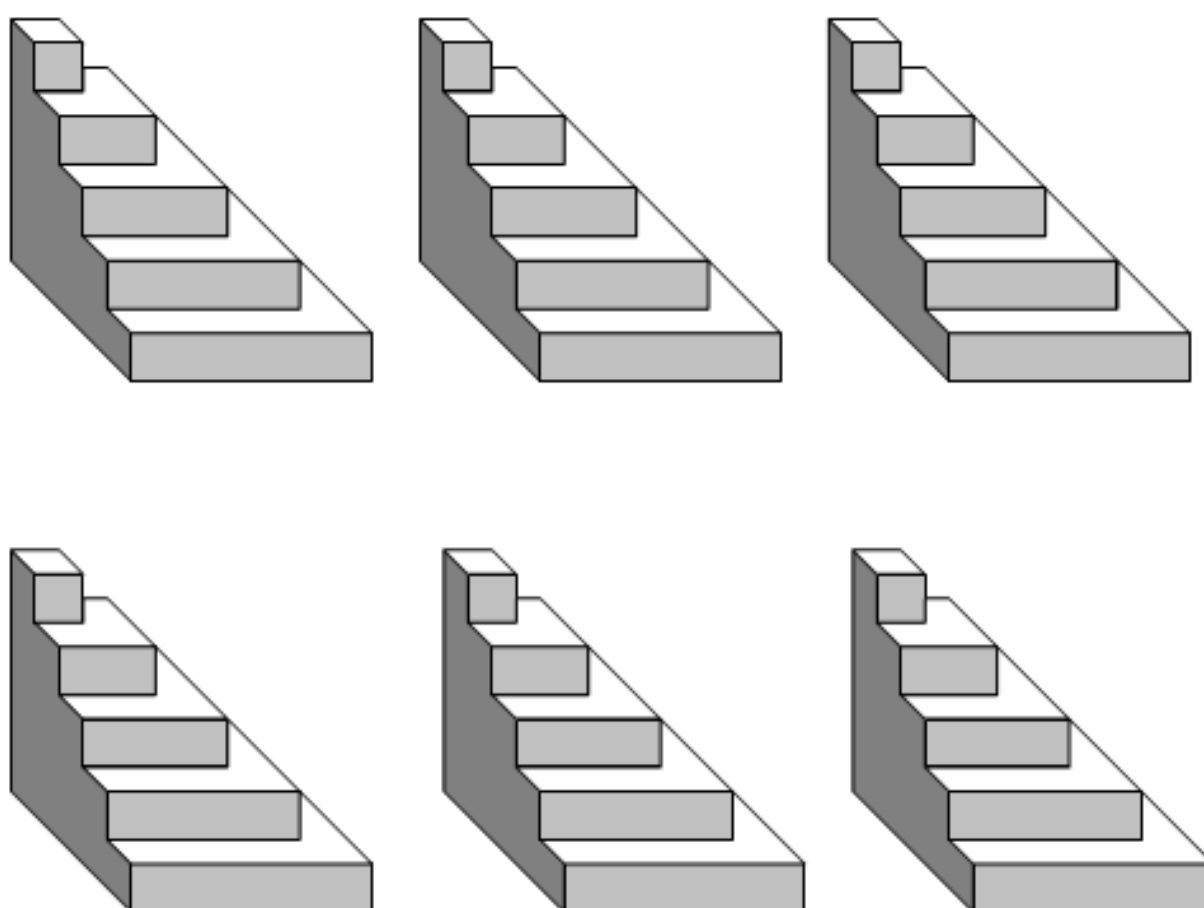
Gioky:- Che cos'è una dimostrazione visiva?

Apotema:- Una dimostrazione senza parole. Basta guardare per capire!

Gioky:- Come le barzellette senza parole?

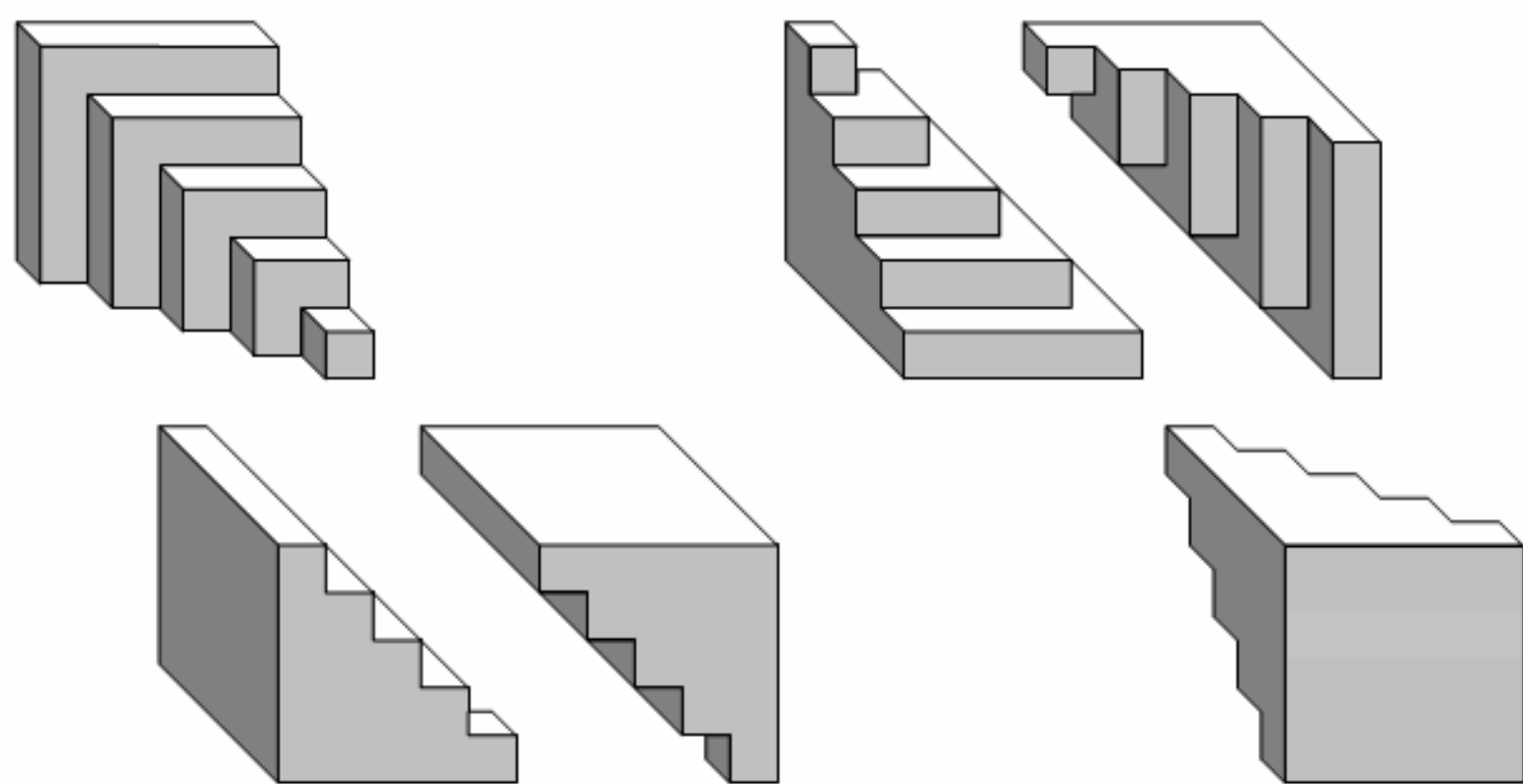
Apotema:- Esattamente! Allora ... visual proof for the sum of the first n squares^(*) ... Eccola qua! Vedete, ragazzi, la somma dei primi n quadrati può essere visualizzata come il volume di questa specie di piramide a gradini ... Se prendiamo 6 di queste piramidi, ecco che le possiamo disporre in modo da formare un parallelepipedo!

PASSO 1

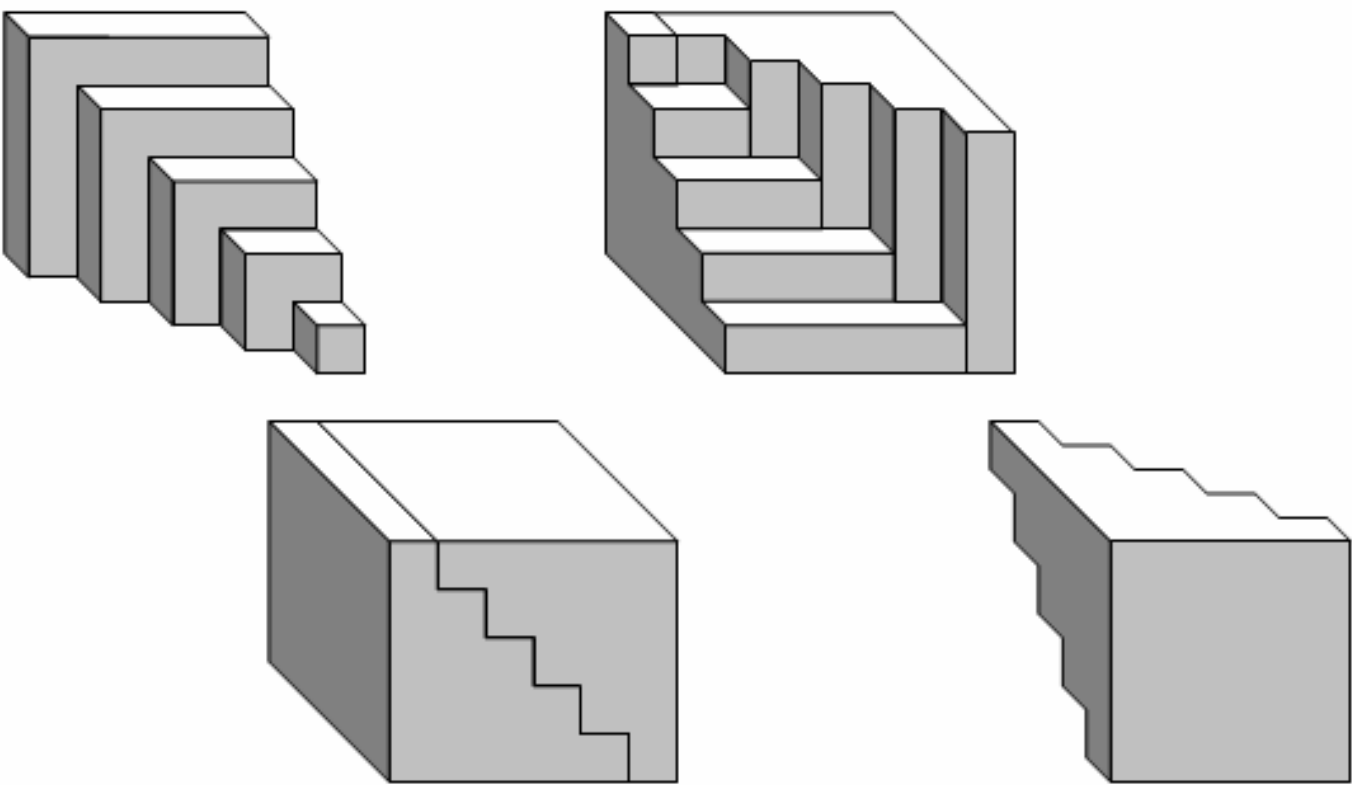


(*) Goldoni G. – *A Visual Proof for the Sum of the First n Squares and for the Sum of the First n Factorials of Order Two* – The Mathematical Intelligencer – 24 (2002), no. 4

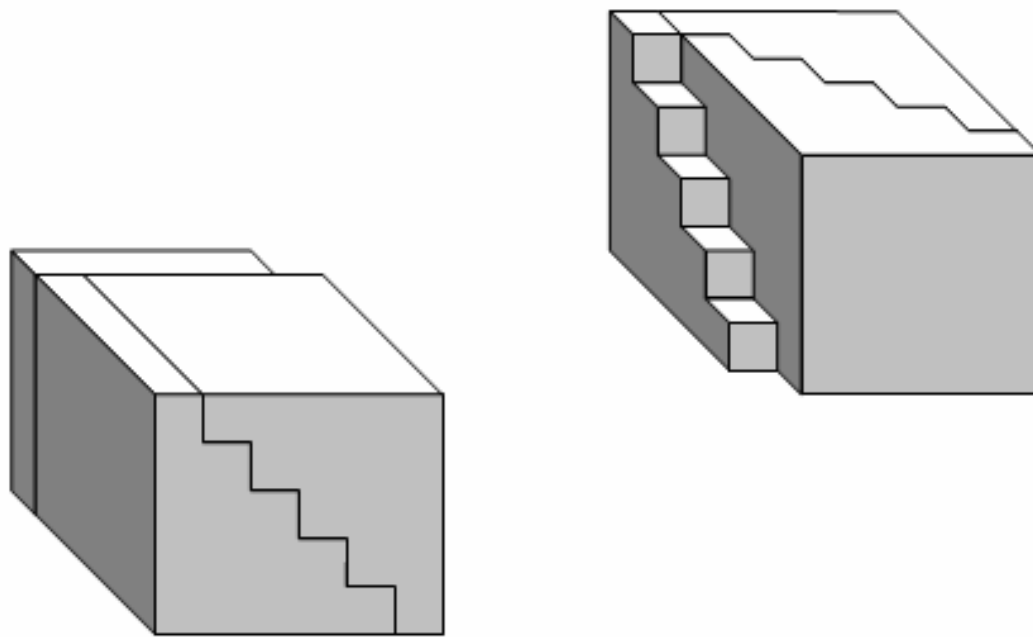
PASSO 2



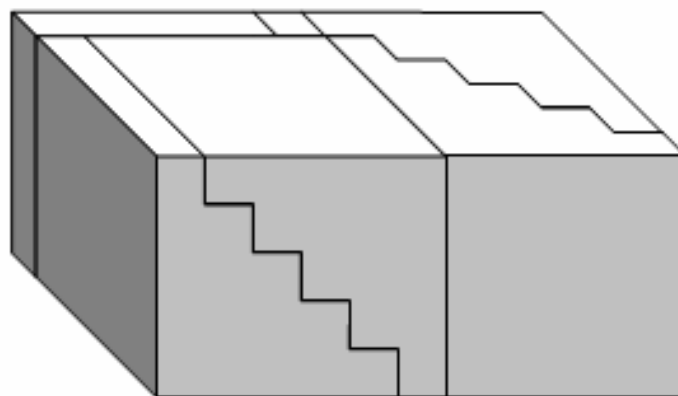
PASSO 3



PASSO 4



PASSO 5



Apotema:- Notate che le dimensioni del parallelepipedo sono n , $n+1$ e $2n+1$ e quindi il suo volume è $n(n+1)(2n+1)$. Ne segue subito che il volume di una piramide è un sesto del volume del parallelepipedo, che è appunto la somma dei primi n quadrati!

Gioky:- Fantastico! Si potrebbe costruire un puzzle!

Scetty:- Siamo riusciti a risolvere alcuni problemi coi metodi infinitesimali, ma mi sembra fosse richiesto qualcosa di più di una semplice tecnica. Per esempio, la formula per la somma dei quadrati non era così scontata...

Apotema:- Una volta introdotti i numeri iperreali, svilupperemo delle tecniche di calcolo, il calcolo differenziale e il calcolo integrale, che renderanno molto più semplice e rapida la soluzione di problemi come quelli appena visti e di altri molto più complessi. Questi problemi avevano principalmente lo scopo di individuare le caratteristiche principali del modo di lavorare con gli infinitesimi e gli infiniti. Dalla prossima lezione vedremo di introdurre con calma i numeri iperreali. A domani!

LEZIONE III

Apotema (mentre firma il registro):- Abbiamo visto alcuni problemi risolti mediante l'uso di numeri infinitesimi e infiniti, ma sapete bene che nei numeri reali non c'è posto per numeri infinitesimi e infiniti! Vediamo di individuare in quale punto dell'edificio dei numeri reali c'è un cancello che si chiude e non lascia entrare gli infinitesimi e gli infiniti. I numeri reali nascono dal processo di misura delle grandezze, per esempio dei segmenti. Tutti sapete bene in cosa consista questo procedimento. Si fissa un segmento arbitrario $\bar{u}$ come unità di misura e si conta quante volte può essere riportato sul segmento $\bar{a}$ da misurare. Se il segmento $\bar{u}$ sta esattamente un numero intero n di volte nel segmento $\bar{a}$, allora la misura è data appunto dal numero intero n . In caso contrario si passa a misurare la differenza tra $\bar{a}$ e n volte $\bar{u}$ usando un opportuno sottomultiplo di $\bar{u}$, nella nostra tradizione la decima parte. Anche in questo caso, può accadere che il sottomultiplo di $\bar{u}$ stia un numero intero di volte nella differenza tra $\bar{a}$ e $n\bar{u}$, oppure no. Il processo è, in generale, infinito e dà luogo a quegli sviluppi decimali che ben conoscete. Vi chiedo: quali proprietà dei segmenti abbiamo implicitamente accettato per poter effettuare questo processo di misura?

Normy:- Non capisco la domanda!

Apotema:- Il processo di misura che vi ho appena ricordato presuppone di eseguire certe operazioni coi segmenti, le quali, a loro volta, presuppongono certe proprietà dei segmenti. Quali?

Ovvy:- Beh, che si possa fare il multiplo di un segmento!

Apotema:- Ok, Ovvy. Questo deriva dal fatto che è possibile, più in generale, eseguire la somma di due segmenti. E poi?

Sekky:- Che esista sempre un sottomultiplo arbitrario di un segmento!

Apotema:- Questa è già una proprietà più sottile. Diamo per buono che ogni segmento possa essere diviso in un numero arbitrario di parti uguali. E poi?

(Silenzio)

Apotema:- Per poter misurare diamo per scontata un'altra clamorosa proprietà! Quale?

(Silenzio)

Sekky:- Ce la dica lei, professore!

Apotema:- Se non è venuta in mente a nessuno è perché è talmente scontata che non ci accorgiamo nemmeno di usarla! Mentre, probabilmente, anche nella scuola dell'obbligo vi hanno insegnato a fare la somma di segmenti e a enunciare la proprietà di divisibilità dei segmenti, forse nessuno vi ha mai fatto notare che, proprio nel primo passo del processo di misura, si dà per buona un'altra proprietà fondamentale.

Ovvy:- Quale, prof?

Apotema:- Nel primo passo del processo di misura voi contate quante volte il segmento campione sta nel segmento da misurare. Date dunque per scontato che questo numero di volte esista! Come fate a contare questo numero di volte? Quand'è che vi fermate?

Ovvy:- Quando, aggiungendone un altro, superiamo il segmento da misurare!

Apotema:- Proprio così, Ovvy! Diamo per scontato che, qualunque sia il segmento da misurare, prima o poi, riportando il segmento campione, finiremo per superarlo!

Normy:- Mi sembra ovvio!

Apotema:- Sono d'accordo con te, Normy, ma devi convenire che abbiamo comunque dato per buona una proprietà dei segmenti che possiamo enunciare in questo modo: dati due segmenti diversi, esiste sempre un multiplo del minore che supera il maggiore. Sul fatto poi che a tutti noi questa proprietà sembri ovvia vorrei fare qualche osservazione. In passato, infatti, non deve essere sempre stata così ovvia. Noi siamo abituati a sentire che gli astronomi misurano le distanze delle galassie in anni luce o in parsec e sappiamo anche che gli anni luce e i parsec possono essere convertiti in metri o, addirittura, in millimetri. Così possiamo misurare in millimetri le distanze delle galassie! E quando dico in millimetri intendo semplicemente dire che possiamo esprimere la misura in millimetri e non certo con la precisione del millimetro! Eppure, in passato, ha richiesto un coraggio e un'apertura mentale non comuni il solo fatto di concepire di poter misurare le dimensioni della Terra o la distanza della luna e del sole! In un suo famosissimo scritto, Archimede dimostra di poter scrivere un numero più grande del numero di granelli di sabbia della

spiaggia di Siracusa, in contrapposizione a coloro che sostenevano che quel numero era infinito. Probabilmente, in un'epoca precedente, c'era anche chi reputava impossibile poter esprimere con un numero le distanze dei corpi celesti. La cosa per noi importante è che questa proprietà, che ora vi scrivo alla lavagna e che chiamiamo *postulato di Eudosso/Archimede*, nega l'esistenza di segmenti infinitesimi e infiniti.

Postulato di Eudosso/Archimede: Dati due segmenti diversi, esiste sempre un multiplo del minore che supera il maggiore.

Sogny:- Ma questi Eudosso e Archimede erano due persone diverse, vero?

Apotema:- Certo, Sogny. E non furono contemporanei: Eudosso visse circa un secolo e mezzo prima di Archimede. C'è chi chiama questa proprietà *postulato di Eudosso* e chi la chiama *postulato di Archimede*, perché, tra quelli le cui opere sono giunte fino a noi, Eudosso è il primo a farne un uso sistematico, mentre Archimede è il primo a enunciarlo esplicitamente. Ma torniamo al nostro problema. Questo postulato può essere enunciato in un altro modo del tutto equivalente. Osserviamo infatti che se un segmento lungo 127 volte il segmento minore supera il segmento maggiore, allora la 127^a parte del segmento maggiore è più piccola del segmento minore. Viceversa, se la 127^a parte del segmento maggiore è più piccola del segmento minore, allora un segmento lungo 127 volte il segmento minore supera il maggiore. Possiamo allora scrivere la seguente seconda versione del postulato precedente.

Postulato di Eudosso/Archimede bis: Dati due segmenti diversi, esiste sempre un sottomultiplo del maggiore che è più piccolo del minore.

Dubby:- Ma, se sono equivalenti, che bisogno c'era di scriverli tutti e due?

Apotema:- Questioni psicologiche.

Normy:- Psicologiche?!

Apotema:- Le due versioni ci aiutano a capire con maggiore chiarezza come mai accettare questo postulato implichi negare l'esistenza di segmenti infinitesimi e infiniti. La prima versione ci

dice con chiarezza che *non esistono segmenti infiniti, perché per quanto grande sia un segmento, posso sempre superarlo riportando un numero finito di volte il segmento campione.*

La seconda versione ci dice invece con chiarezza che non esistono segmenti infinitesimi *perché, per quanto piccolo sia un segmento, posso sempre dividere il segmento campione in un numero finito di parti uguali, più piccole del segmento dato.*

Scetty:- Allora per poter parlare di infinitesimi e di infiniti dobbiamo rifiutare questa proprietà...

Apotema:- Esattamente. Finché continueremo ad accettare il postulato di Eudosso/Archimede non potremo mai introdurre gli infinitesimi e gli infiniti.

Dubby:- Scusi, prof, ma se gli astronomi misurano le galassie significa che il postulato vale!

Apotema:- Dubby, una cosa è la realtà e un'altra cosa è la matematica. Che cosa dovremmo dire allora del postulato secondo il quale un segmento si può dividere in un numero arbitrario di parti? Esiste forse qualcosa in natura che si può dividere all'infinito? Sembra proprio di no. Eppure la cosa più semplice, e più utile!, non è richiedere che un segmento si possa dividere al massimo 12874 volte, ma che si possa continuare a dividere all'infinito. Noi vogliamo avere a disposizione dei numeri infinitesimi e infiniti, non per sfidare chissà quale divieto, ma per descrivere e risolvere utilmente problemi come quelli che abbiamo affrontato nelle scorse lezioni. Perché mai dovremmo rinunciare a uno strumento che si è rivelato così potente?

Normy:- Ma, alla fine, esistono o non esistono sulla retta dei segmenti infinitesimi o infiniti?

Apotema:- Se ci pensi bene, Normy, la tua domanda è mal posta. La retta non è come una mosca, che il naturalista può osservare con la lente di ingrandimento per vedere se davvero ha sei zampe. La retta di cui parli esiste solo nella nostra mente. È forse l'idealizzazione di un filo teso, infinitamente sottile e prolungato a piacere. Ma questa è solo un'immagine intuitiva, che non ci consente di operare matematicamente. Non è ancora un oggetto matematico. Non ha senso chiedersi se sulla retta esistono veramente dei segmenti infinitesimi. Esistono invece diversi modelli matematici del concetto intuitivo di retta, alcuni senza segmenti infinitesimi, altri con segmenti infinitesimi. La

domanda corretta non è quale sia la "vera" retta, ma quale modello di retta sia meglio usare per modellizzare e risolvere alcuni tipi di problemi. Fino a oggi abbiamo usato il modello di retta che abbiamo chiamato retta reale, cioè una retta i cui punti sono in corrispondenza biunivoca coi numeri reali. In queste lezioni inizieremo a studiare un diverso modello di retta, che chiameremo retta iperreale.

Sekky:- Cominciamo adesso, professore?

Apotema:- La prossima lezione. Oggi introduciamo alcuni strumenti ottici ideali per esplorare la retta reale, che ci serviranno come palestra per altri e più potenti strumenti ottici ideali che useremo per esplorare la retta iperreale.

Sogny:- Strumenti ottici?! Ma li useremo davvero?

Apotema:- Quotidianamente. Ma non preoccupatevi, non rischierete di romperli! D'ora in poi chiameremo *numeri standard* i numeri reali e *segmenti standard* i segmenti la cui misura è esprimibile con un numero reale positivo. In pratica, tutti i numeri e tutti i segmenti che avete usato fino ad ora.

Asy:- Ma cosa significa "standard"?

Apotema:- Chi me lo sa dire?

Rozzy:- Ignorante! Significa "tipo"!

Sekky:- Significa anche livello medio, no?

Apotema:- Avete detto bene tutti e due. Standard è un termine di origine inglese, che deriva dal francese col significato di stendardo. Inizialmente indicava quindi il livello di un casato o qualcosa del genere ed è successivamente passato ad indicare un livello medio o tipico in generale. In questo caso ha il significato di numeri e segmenti tipici, usuali.

Sogny:- E che strumenti ottici useremo?

Apotema:- Microscopi, telescopi e zoom all'indietro. Diremo che un'immagine della retta è nella scala ordinaria se si distingue chiaramente il punto 1 dal punto 0.

Normy:- In che senso?

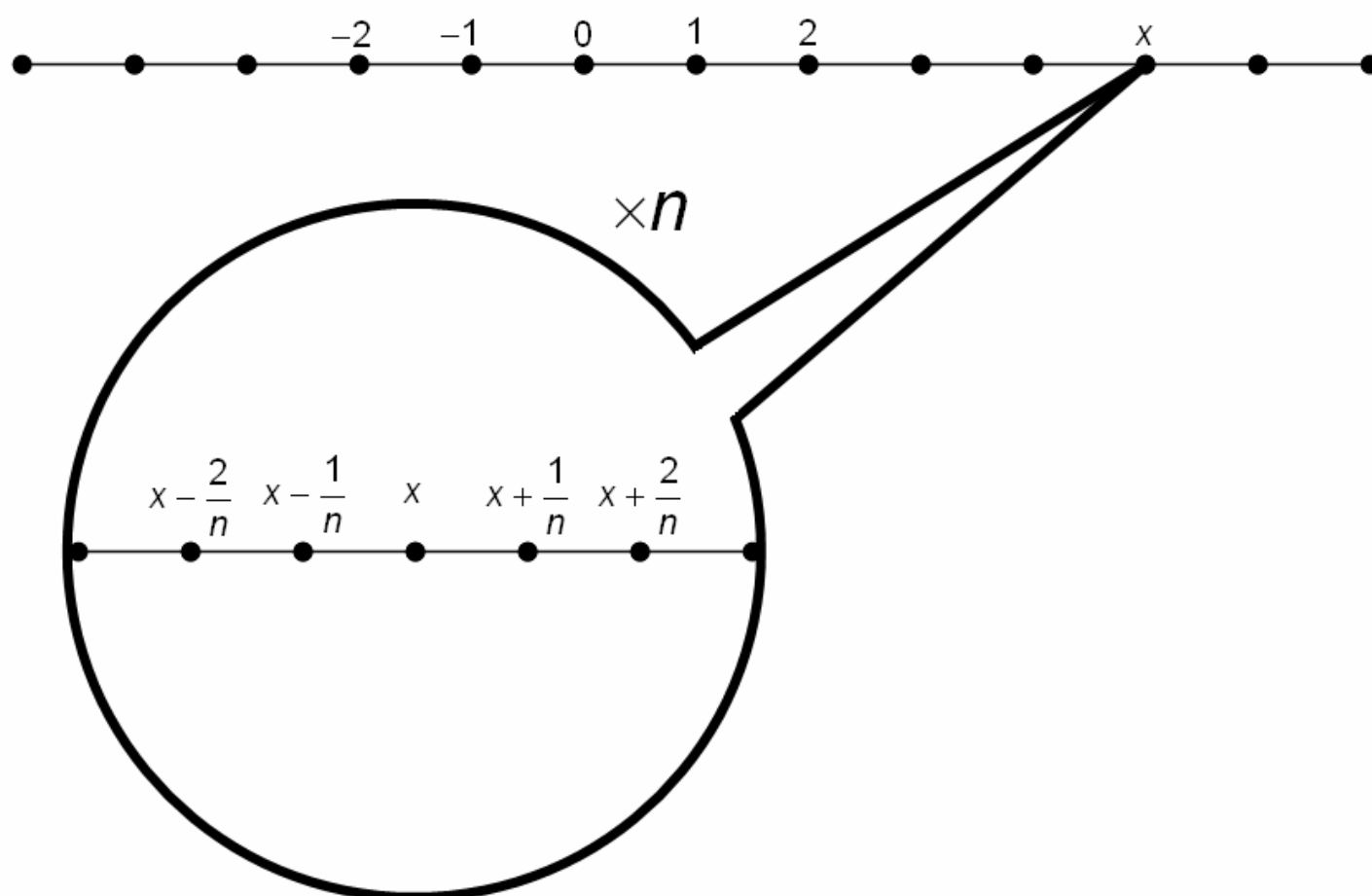
Apotema:- Se faccio un disegno della retta con delle tacche distanziate di 1 *cm* e da una tacca all'altra si va di 1000 in 1000, ecco allora che, in quella scala, non riesco a distinguere l'uno dallo zero. Li vedo appiccicati! In ottica si dice che non riesco a separarli. Dico che ho disegnato la retta in una scala ordinaria se nel disegno risultano ben separati i punti 0 e 1. Tutto qua!

Normy:- Ok, prof!

Apotema:- Iniziamo col microscopio. Il microscopio che useremo è uno strumento ottico ideale che possiamo puntare su un numero qualsiasi, e quindi su un punto qualsiasi della retta, e che ci mostra nel campo visivo una porzione di retta ingrandita n volte. Per esempio, se punto il microscopio sul numero x in una rappresentazione della retta in scala naturale e uso 1000 ingrandimenti, nel campo visivo compare un segmento centrato nel numero x . Secondo voi, quanto misurano le tacche che nel campo visivo del microscopio sembrano avere la stessa distanza delle tacche della scala ordinaria? -

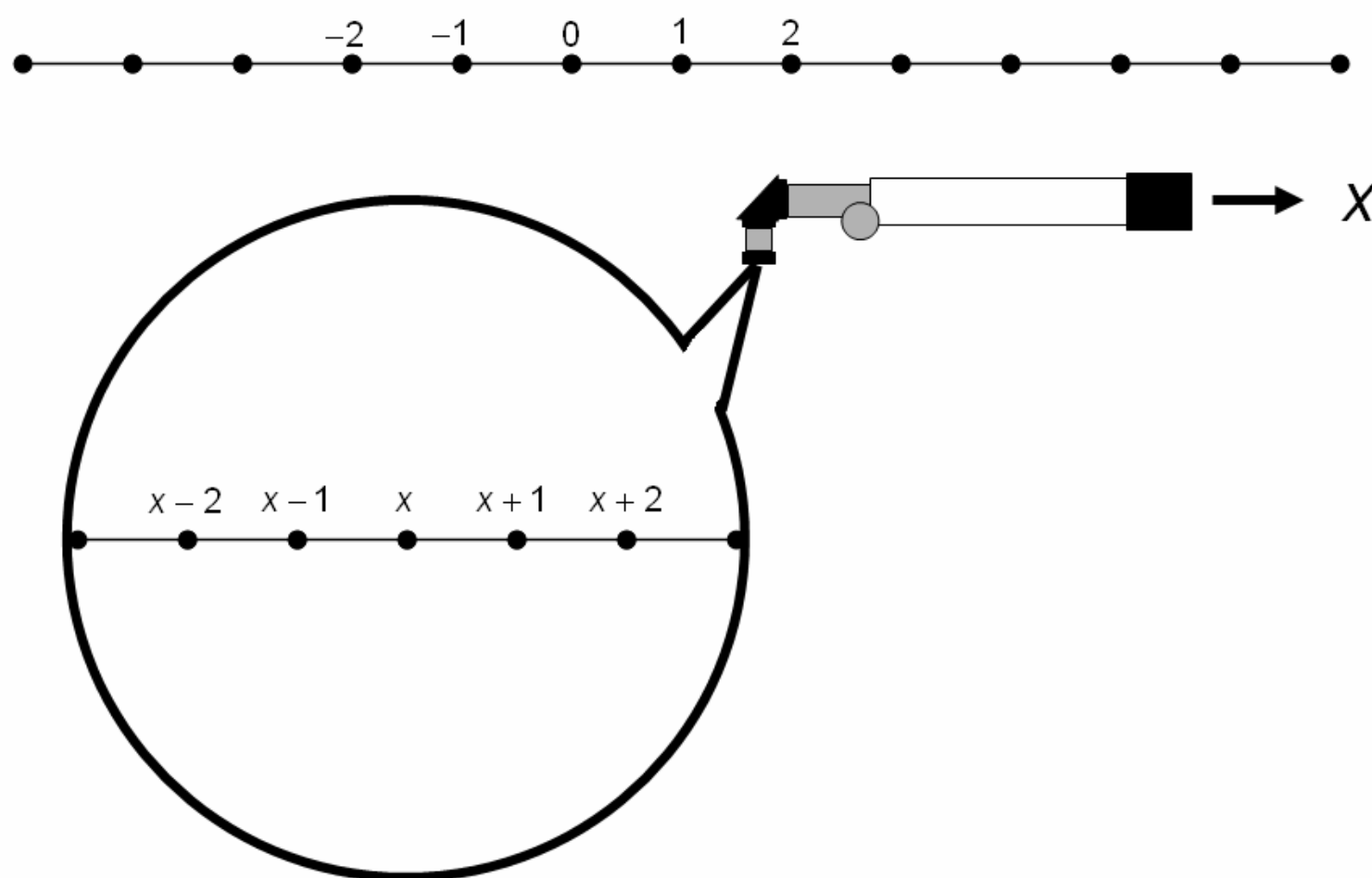
Svelty:- Sono in realtà 1000 volte più piccole! Distanza quindi tra loro un millesimo!

Apotema:- Esattamente. Quindi, se nella rappresentazione in una scala ordinaria della retta punto un microscopio nel numero x e uso n ingrandimenti, nel campo visivo appare un segmento centrato in x con delle tacche apparentemente della stessa dimensione di quelle della scala ordinaria, ma di ampiezza $1/n$. Le tacche, a partire da x e andando verso destra, corrispondono quindi ai numeri $x + \frac{1}{n}$, $x + \frac{2}{n}$, ecc., mentre andando verso sinistra corrispondono ai numeri $x - \frac{1}{n}$, $x - \frac{2}{n}$, ecc.



Normy:- Semplice!

Apotema:- Per indicare che stiamo usando un microscopio a n ingrandimenti scriviamo a fianco del campo visivo " $\times n$ ".
 Passiamo ai telescopi. Un telescopio è uno strumento ottico ideale che ci mostra una porzione lontana della retta nella stessa scala della porzione vicina. Per esempio, se puntiamo il telescopio nel punto x in una rappresentazione della retta in una scala ordinaria, nel campo visivo del telescopio vediamo un segmento di retta centrato nel numero x e con le tacche a distanza unitaria. Dunque, a destra di x vediamo le tacche che corrispondono ai punti $x+1$, $x+2$, ecc. e a sinistra di x le tacche che corrispondono ai numeri $x-1$, $x-2$, ecc. Per indicare che puntiamo il telescopio sul numero x , scriviamo " $\rightarrow x$ ".



Dubby:- Non ho ancora capito a cosa servano questi strumenti!

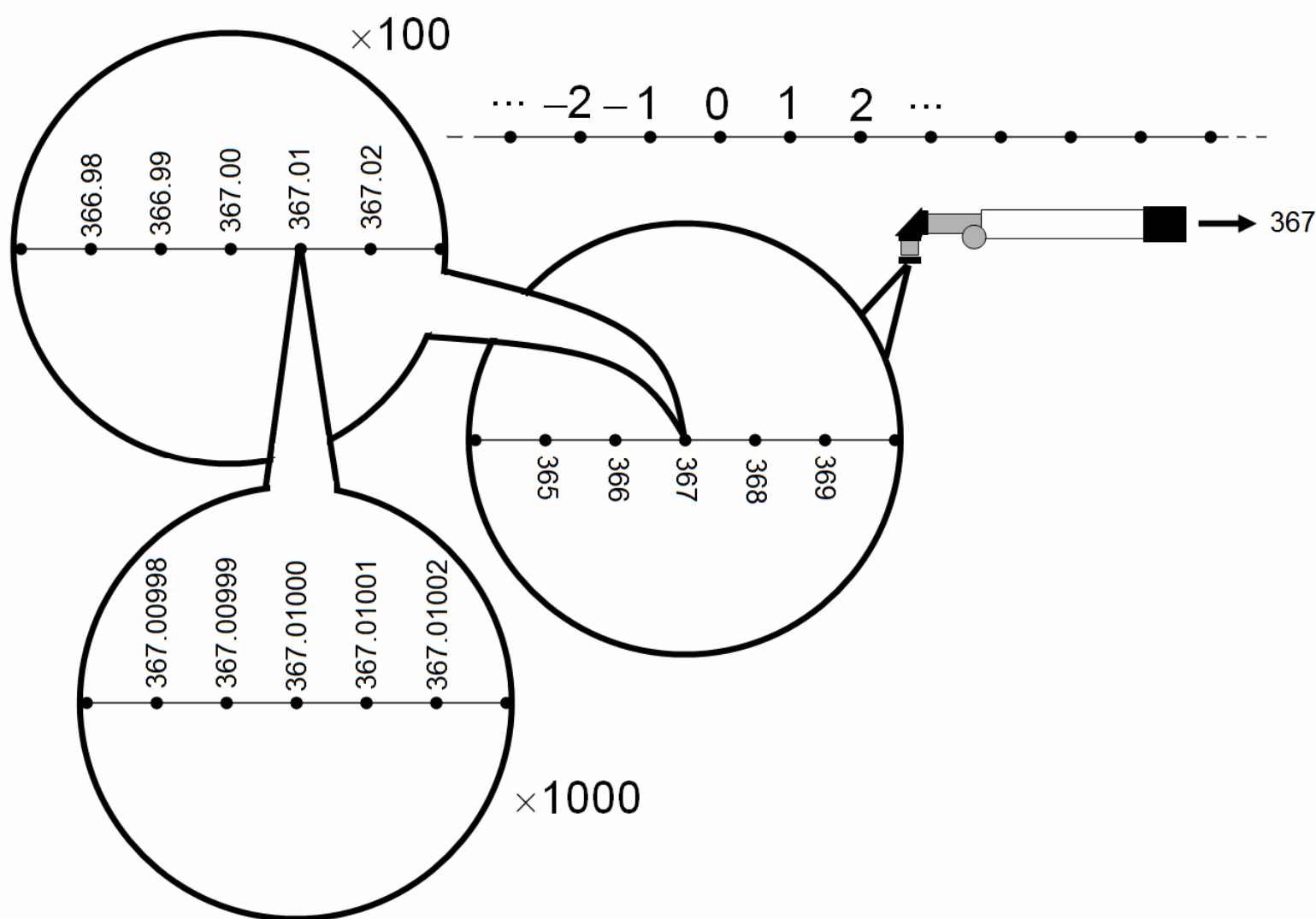
Apotema:- A visualizzare dei punti della retta! Ma non vi ho ancora detto la cosa più importante. Questi strumenti si possono combinare per formare strumenti ancora più potenti. Per esempio, posso usare un microscopio per osservare il campo visivo di un telescopio o di un altro microscopio. Supponiamo di voler visualizzare sulla retta il numero 367.01002. In un disegno solito della retta potreste usare tacche che vanno di 100 in 100

e disegnare un punto che si trova un po' più a destra della metà dell'intervallo che va da 300 a 400. Del tutto insoddisfacente! Ecco invece come possiamo farlo in modo molto chiaro con i nostri strumenti ottici. Disegniamo la retta nella scala ordinaria. Puntiamo quindi un telescopio nel numero 367 e nel campo visivo vediamo i numeri ... 365, 366, 367, 368, 369, 370, Puntiamo ora un microscopio a 100 ingrandimenti nel numero 367 nel campo visivo del telescopio. Ecco che il microscopio ci mostra i numeri ... 366.98, 366.99, 367.00, 367.01, 367.02, Puntiamo infine un altro microscopio sul numero 367.01 nel campo visivo del primo microscopio. Con che ingrandimento? -

Fuory:- Cento ingrandimenti!

Svelty:- No! Mille ingrandimenti!

Apotema:- Se usate 100 ingrandimenti, nel campo visivo le tacche corrisponderanno ai numeri 367.0098, 367.0099, 367.0100, 367.0101, 367.0102... Non riesci a vedere il numero 367.01002. In quella scala, come ha detto Svelty, devi andare al passo di un millesimo di tacca. Ecco allora che, puntando in 367.01 un microscopio a 1000 ingrandimenti, vedi nel centro il numero 367.01000 e, andando verso destra, i numeri 367.01001 e, finalmente, 367.01002!

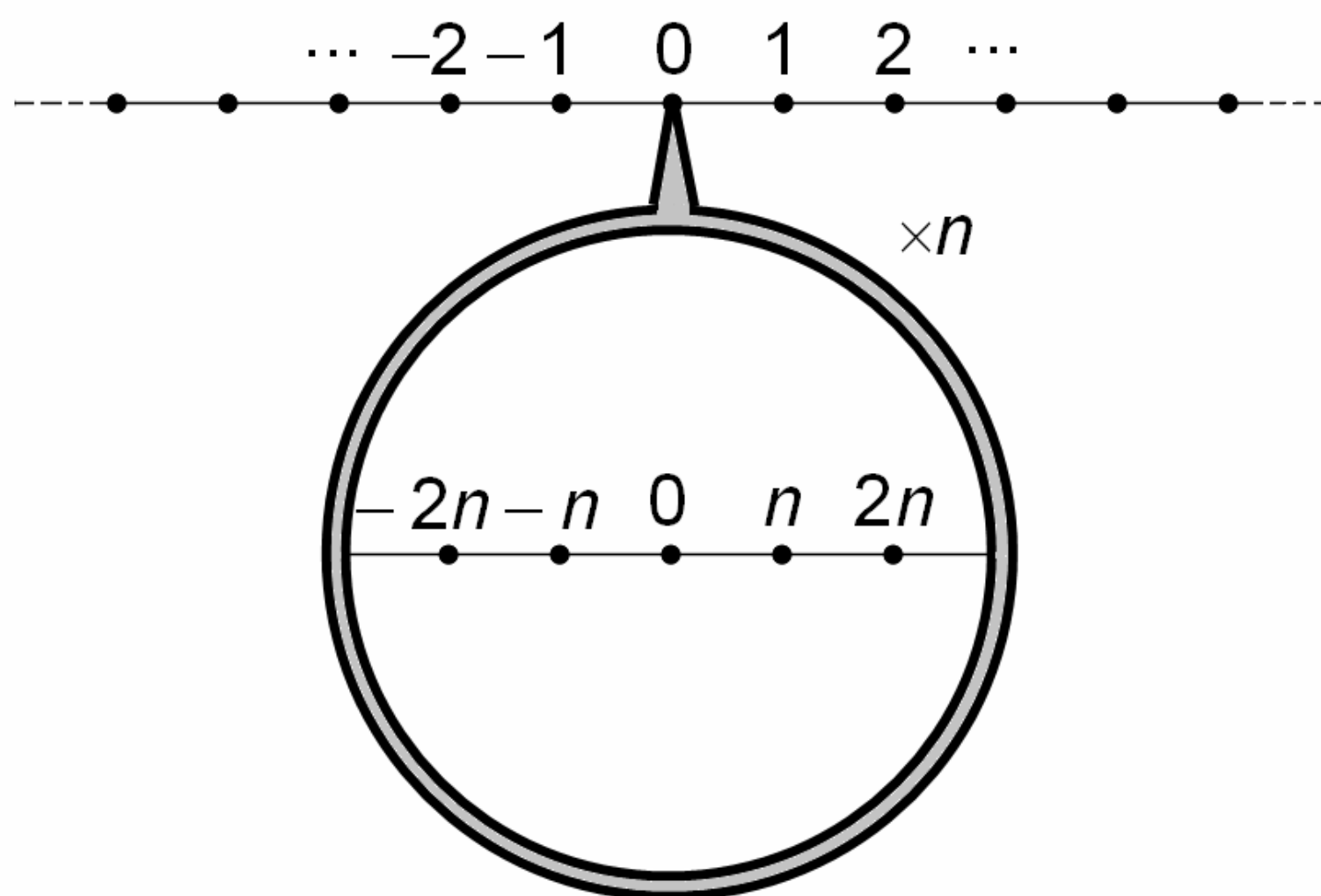


Normy:- Adesso ho capito a cosa servono! Permettono di vedere meglio i numeri!

Dubby:- Ma non potevamo puntare direttamente un microscopio su 367.01002?

Apotema:- Certo, Dubby. La vera utilità di questi strumenti, come avremo occasione di vedere, è di arrivare gradualmente al numero da visualizzare, passando per fasi intermedie che consentono di fare utili considerazioni.

Sogny:- E lo zoom all'indietro?



Apotema:- Oh, grazie Sogny! Me ne ero dimenticato! Lo zoom all'indietro, che chiameremo semplicemente zoom, è uno strumento ottico ideale che useremo esclusivamente puntato nell'origine. Quando, partendo da un'immagine in una scala ordinaria della retta, lo usiamo in scala 100, lo zoom ci mostra la retta come la vedremmo osservata da una distanza maggiore in modo che risulti rimpicciolita di 100 volte. Nel campo visivo vediamo sempre al centro lo zero ma, spostandoci verso destra, troviamo adesso i numeri 100, 200, ecc. e, spostandoci verso sinistra, i numeri -100 , -200 , ecc. Più in generale, se puntiamo uno zoom in scala n sulla retta in una scala ordinaria,

nel campo visivo avremo al centro lo zero e, andando verso destra, i numeri n , $2n$, ecc. e, andando verso sinistra, i numeri $-n$, $-2n$, ecc.

Normy:- E quel doppio contorno lo ha disegnato apposta?

Apotema:- Sì, per distinguerlo da un microscopio. I microscopi, telescopi e zoom appena introdotti, li chiameremo "standard", in contrapposizione a strumenti ancora più potenti che incontreremo in seguito. Come esercizio, provate a visualizzare il numero 0.00020003.

Gioky:- Se ho ben capito, se punto uno di questi telescopi su Marte posso vedere quei dettagli di Marte che sono delle stesse dimensioni degli oggetti che vedo qui intorno a me sulla Terra!

Apotema:- Purtroppo strumenti del genere non esistono nel mondo reale. E tantomeno si possono combinare tra loro!

Normy:- Coi nostri strumenti invece, se guardo il telescopio col microscopio, vedo i microbi marziani!

Gioky:- E se guardo il microscopio con un altro microscopio vedo i peli dei microbi marziani!

Apotema:- Buon divertimento!

LEZIONE IV

Gioky:- Posso venire io, prof, a correggere il compito?

Apotema:- Vieni pure, Gioky.

Gioky:- Dovevamo visualizzare il numero 0.00030002. Disegno la retta nella scala ordinaria...

Apotema:- Che sarebbe?

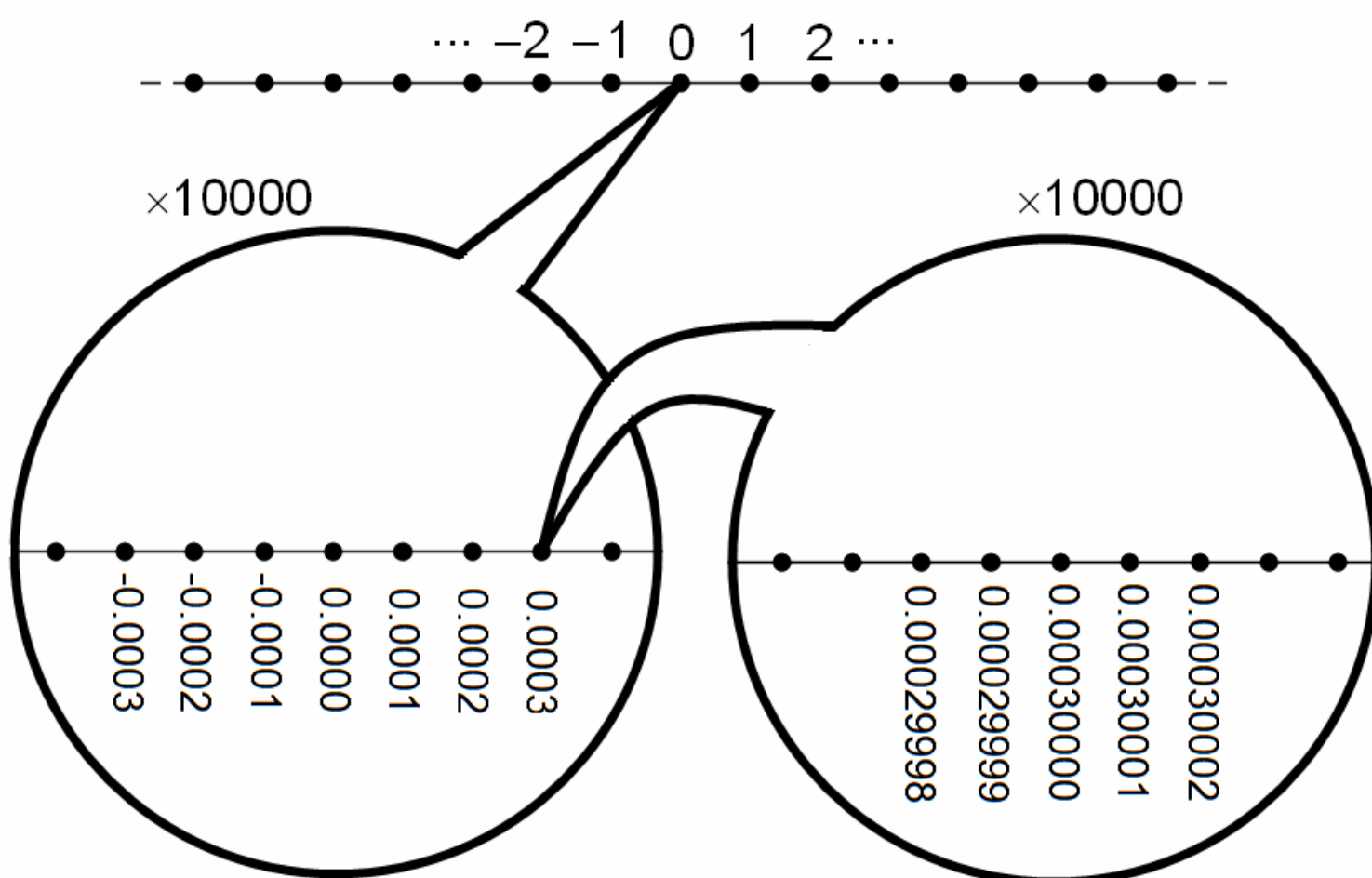
Gioky:- Una scala in cui il numero 1 si vede staccato...

Apotema:- Separato!

Gioky:- ... separato dallo 0. Il numero 0.00030002 lo vediamo appiccicato allo zero!

Apotema:- Diciamo che sembra coincidere con lo zero.

Gioky:- Punto allora un microscopio a $10\cdot000$ ingrandimenti nello zero. Ecco che, nel campo visivo, vedo il numero 0.0003. Adesso punto un microscopio a $10\cdot000$ ingrandimenti nel numero 0.0003 nel campo visivo del microscopio precedente. Ecco che finalmente vedo il numero 0.00030002. Facilissimo!



Apotema:- Bene, Gioky, vai pure al posto. Entriamo ora nel vivo

della questione. Abbiamo enunciato il postulato di Eudosso/Archimede e abbiamo visto come esso neghi l'esistenza di segmenti infinitesimi e infiniti. Vale un enunciato analogo per i numeri positivi: dati due numeri positivi distinti, esiste sempre un multiplo del minore che supera il maggiore. In questa forma, il postulato nega l'esistenza di numeri infinitesimi e infiniti. Non può infatti esistere un numero positivo infinitesimo, perché, per quanto piccolo esso sia, esiste un suo multiplo che supera l'unità. Di quale proprietà dovrebbe quindi godere un numero positivo infinitesimo?

Normy:- Dovrebbe essere talmente piccolo che, comunque se ne prendesse un multiplo, non potrebbe mai superare l'unità!

Apotema:- Proprio così. E potrebbe però superare un altro numero standard, magari molto piccolo?

Fuory:- Questo non possiamo saperlo!

Geny:- E invece lo sappiamo! Non potrebbe!

Fuory:- Come fai a esserne certo?

Geny:- Supponiamo per assurdo che un multiplo di un numero infinitesimo sia maggiore di un numero standard. Poiché esiste un multiplo del numero standard che supera l'unità e poiché un multiplo di un multiplo è ancora un multiplo, avremmo allora che un multiplo del numero infinitesimo supererebbe l'unità!

Normy:- Non sono sicuro di avere capito...

Fuory:- E allora devi dire che non hai capito!

Geny:- Se n volte il numero infinitesimo supera un numero standard e m volte il numero standard supera l'unità, allora mn volte l'infinitesimo supera l'unità! Ma questo è impossibile!

Normy:- Allora un numero infinitesimo deve essere minore di ogni numero standard!

Apotema:- Un numero positivo infinitesimo deve essere minore di ogni numero positivo standard. Passiamo agli infiniti. Non esistono numeri standard positivi infiniti, perché per quanto sia grande un numero standard, esiste sempre un multiplo dell'unità che lo supera. Di quale proprietà dovrebbe quindi godere un numero positivo infinito?

Svelty:- Dovrebbe essere maggiore di ogni multiplo dell'unità e quindi di ogni numero positivo standard!

Apotema:- Esatto. Perché se fosse minore di almeno un numero standard allora esisterebbe un multiplo dell'unità che lo supererebbe.

Normy:- La stessa cosa vale per i segmenti, vero?

Apotema:- Come lo diresti?

Normy:- Un segmento infinitesimo dovrebbe essere minore di ogni segmento standard e un segmento infinito dovrebbe essere maggiore di ogni segmento standard!

Apotema:- Prendiamo allora queste proprietà come definizioni. Per i numeri negativi basterà passare ai valori assoluti. Diciamo che un numero è infinitesimo se , in valore assoluto, è minore di ogni numero standard positivo. Esistono numeri standard infinitesimi?

Fuory:- No!

Apotema:- E invece sì! Un numero...

Svelty:- Lo zero!

Fuory:- Ma allora non è vero che il postulato di Eudosso/Archimede nega gli infinitesimi!

Apotema:- Si parlava della non esistenza di numeri standard positivi infinitesimi. Lo zero non è positivo! Analogamente, si parlava della non esistenza di segmenti standard infinitesimi, non di un punto.

Normy:- Allora lo zero è infinitesimo!

Apotema:- Sì! Anzi, in un certo senso è il più infinitesimo di tutti. Ma continuiamo con le definizioni. Un numero si dice infinito se, in valore assoluto, è maggiore di ogni numero standard positivo. Esistono numeri standard infiniti? -

Normy:- No!

Apotema:- Bene, Normy, ti vedo sicuro! Se un numero non è infinito, diciamo che è finito. Qual è allora la definizione di numero finito?

Svelty:- Un numero è finito se non è in valore assoluto maggiore di ogni numero standard positivo!

Apotema:- Ok, Svelty, ma voglio la definizione in forma affermativa, non negativa! Qual è la negazione di "maggiore di ogni numero standard positivo"?

Fuory:- Minore di ogni numero standard positivo!

Apotema:- Fuory, qual è la negazione di "Amilcare è più alto di tutti gli studenti di questa classe"?

Fuory:- Amilcare è più basso di ... di almeno uno studente di questa classe... Ho capito l'errore, prof! Un numero si dice finito se è minore di...

Apotema:- In valore assoluto!

Fuory:- Se, in valore assoluto, è minore di almeno un numero standard!

Apotema:- Così va meglio. Esistono numeri standard finiti?

Sekky:- Tutti, professore! Sono tutti finiti i numeri standard! Ogni numero standard è infatti, in valore assoluto, minore di almeno un numero standard. Basta prendere il valore assoluto aumentato di uno!

Apotema:- E che relazione c'è tra i numeri infinitesimi e i numeri finiti?

Sekky:- Anche i numeri infinitesimi sono finiti! Sono tutti addirittura in valore assoluto minori di ogni numero standard positivo!

Apotema:- Dunque un numero se non è infinito è finito, e se è finito può essere infinitesimo o non esserlo. Quand'è che un numero è finito ma non infinitesimo?

Svelty:- Se è minore di almeno un numero standard positivo, ma non di tutti!

Apotema:- In valore assoluto! Dire che non è minore di tutti, significa dire che è maggiore di almeno uno. Dunque, un numero finito non infinitesimo è un numero in valore assoluto compreso tra due numeri standard positivi.

Lenty:- Può ripetere le definizioni?

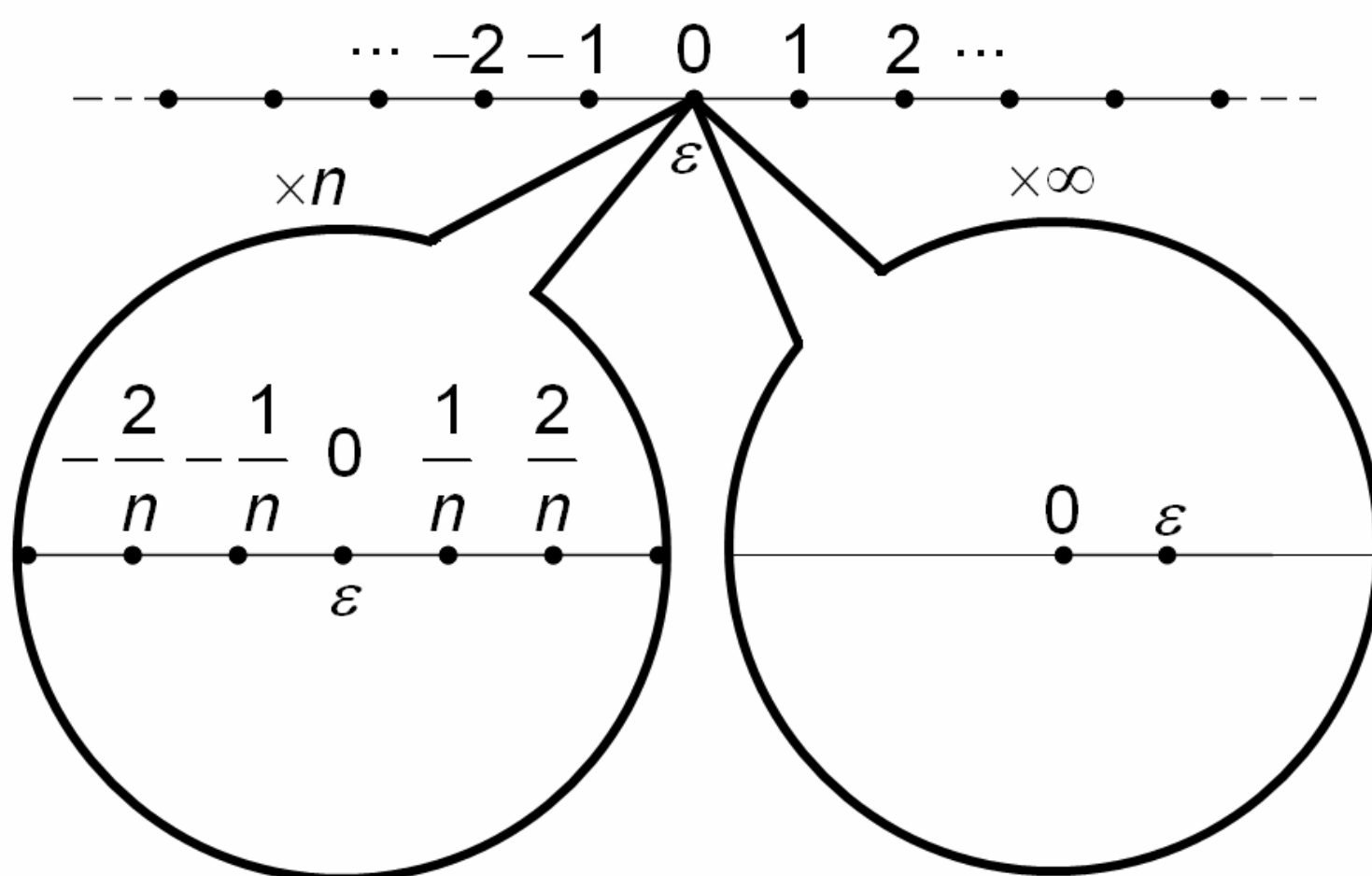
Apotema:- Le ripeterò riferendole ai segmenti. Un segmento si dice infinitesimo se è minore di ogni segmento standard. Se consideriamo il punto come un segmento nullo, allora il segmento nullo è l'unico segmento standard infinitesimo. Un segmento si dice infinito se è maggiore di ogni segmento standard. Un segmento si dice finito se non è infinito, e quindi se è minore di almeno un segmento standard. Un segmento si dice finito non infinitesimo se non è né infinito né infinitesimo. Un segmento finito non infinitesimo è quindi un segmento compreso tra due segmenti standard. Tutti i segmenti standard sono finiti e tutti i segmenti standard, ad esclusione del segmento nullo, sono finiti non infinitesimi.

Fuory:- Allora, prof, i segmenti standard, tranne il segmento nullo, sono esattamente i segmenti finiti non infinitesimi!

Apotema:- No, Fuory. Vedremo presto che quello che dici è falso. Ma adesso facciamo il salto! Neghiamo il postulato di Eudosso/Archimede e accettiamo che esista almeno un numero infinitesimo ε positivo. Ovviamente, si tratterà di un numero che

non è standard. Diremo appunto che è un numero non-standard. Accetteremo anche che esista un segmento la cui lunghezza sia data da questo numero. In altre parole, supporremo che esista sulla retta un punto di coordinata ε . Come visualizzare questo numero sulla retta? Nella scala ordinaria il numero ε sembra coincidere con lo zero, come del resto sembra coincidere con lo zero un numero standard piccolissimo. Ma c'è una profonda differenza. Se puntiamo un microscopio standard nello zero, ecco che, qualsiasi sia l'ingrandimento usato, il numero ε sembra sempre coincidere con l'origine.

Normy:- Ma non coincide con l'origine!



Apotema:- Useremo allora uno strumento ancora più potente, in grado di separarlo dallo zero: un microscopio non-standard, cioè a infiniti ingrandimenti. Per indicare che si tratta di un microscopio non-standard, scriveremo a fianco " $\times \infty$ ". Useremo invece i quantificatori " $\forall$ " e " $\exists$ ", riferiti al numero n di ingrandimenti, per indicare che l'immagine nel campo visivo è rispettivamente quella che si vede a qualsiasi ingrandimento oppure per un opportuno ingrandimento. Nel nostro caso, la scritta " $\forall n$ " a fianco del microscopio standard a n ingrandimenti sta ad indicare che a qualsiasi ingrandimento n il

numero ε non si riesce a separare dallo zero.

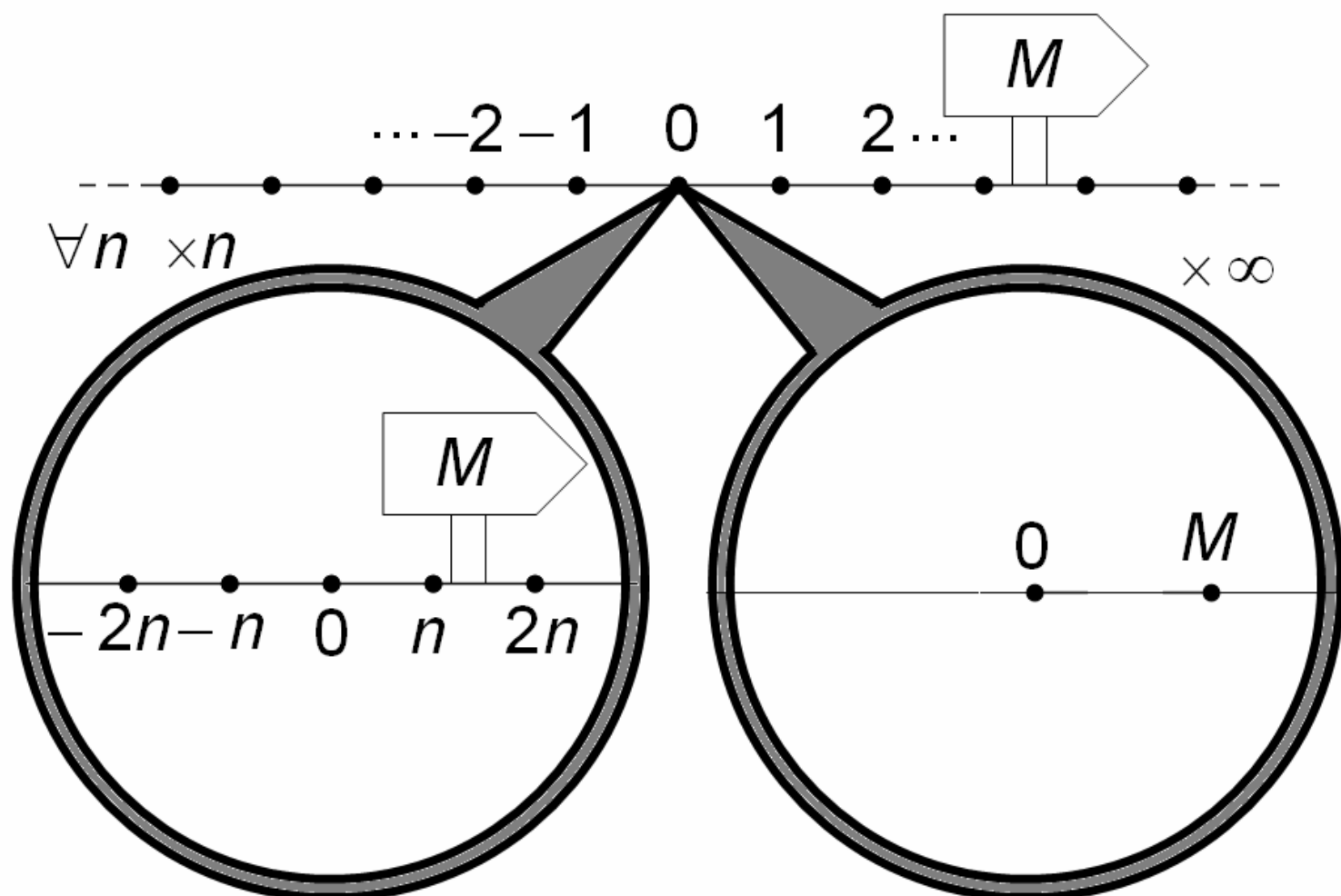
Sogny:- E come facciamo a vedere i numeri infiniti?

Apotema:- Abbiamo accettato l'esistenza di un numero infinitesimo e questa sola ipotesi è sufficiente per garantire l'esistenza di infiniti numeri infinitesimi e di infiniti numeri infiniti, non appena lo combiniamo coi numeri standard mediante le 4 operazioni e continuiamo a usare le regole di calcolo dei numeri standard. Per esempio, il numero $1/\varepsilon$ è un infinito.

Gioky:- Ovvio! Infatti ε sta infinite volte nell'unità!

Apotema:- Per mostrare che $1/\varepsilon$ è infinito dobbiamo mostrare che è maggiore di ogni numero standard positivo. Prendiamo dunque un numero standard positivo s qualsiasi. Siccome $s > 0$, allora anche $1/s > 0$ e, poiché ε è un infinitesimo positivo, deve essere $0 < \varepsilon < 1/s$. Ne segue subito che $1/\varepsilon > s$. Abbiamo così dimostrato che $1/\varepsilon$ è maggiore di ogni numero standard positivo e quindi che è infinito.

Ovvy:- Lo si capiva subito che era infinito!



Apotema:- Vediamo di rispondere a Sogny. Consideriamo un numero M infinito positivo e disegniamo la solita retta nella scala ordinaria. Il numero M non si vede e mettiamo una freccia per indicare che si trova a destra del campo visivo. Puntiamo ora

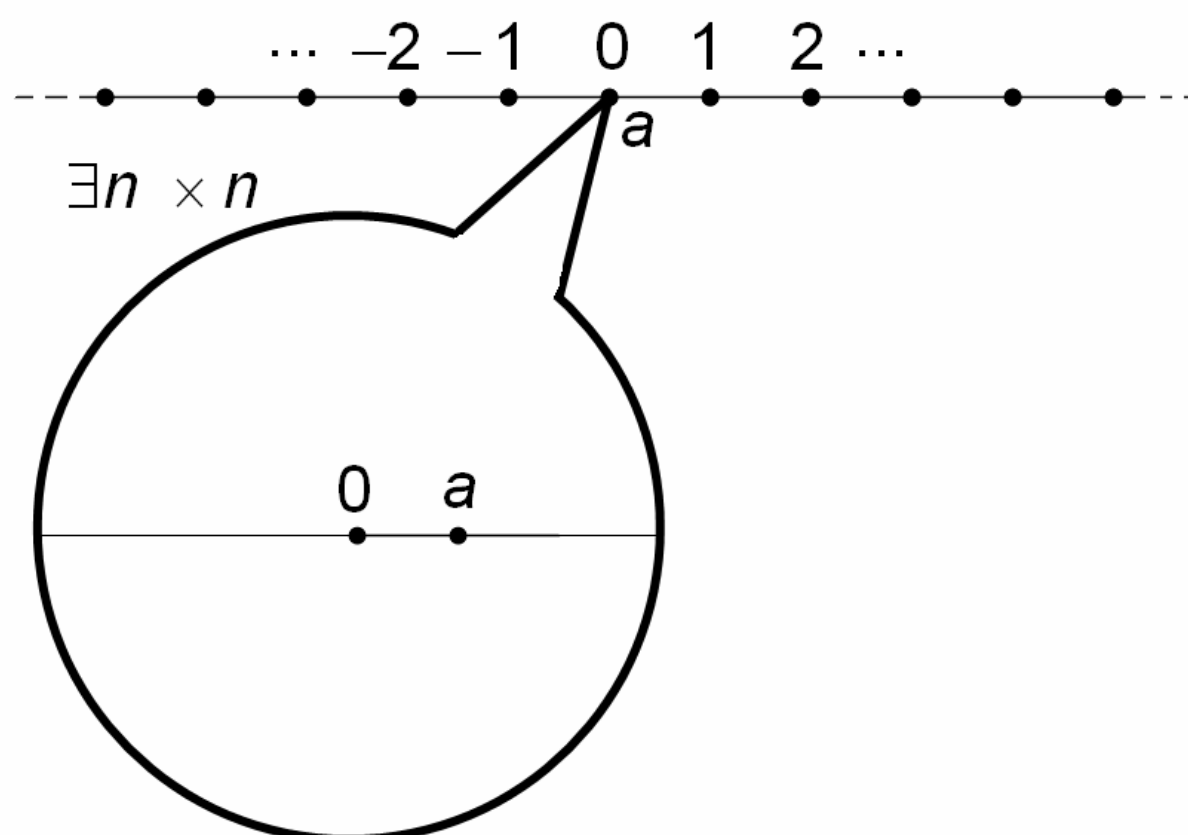
uno zoom standard nell'origine. Comunque noi aumentiamo il fattore di scala ecco che il numero M continua a rimanere a destra del campo visivo. Occorre allora uno zoom più potente: uno zoom non-standard a una scala infinita! Questo zoom è in grado di far entrare da destra nel campo visivo il numero infinito positivo M .

Sogny:- Divertente!

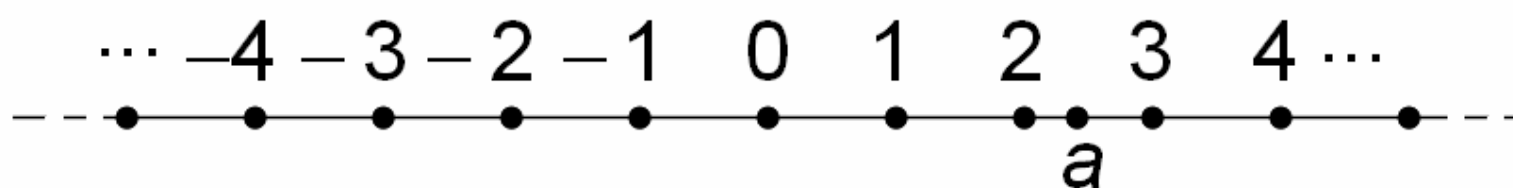
Apotema:- E ora vediamo di visualizzare un numero a finito non infinitesimo. Dobbiamo distinguere tre casi, a seconda che il numero a sia "piccolo", "medio" o "grande".

Gioky:- Come la birra!

Apotema:- Il primo caso è quello in cui ci appare coincidere con l'origine. Si tratta però soltanto di un numero piccolo, ma non infinitesimo! Ci basta infatti un microscopio standard regolato a un opportuno ingrandimento per separarlo dallo zero.

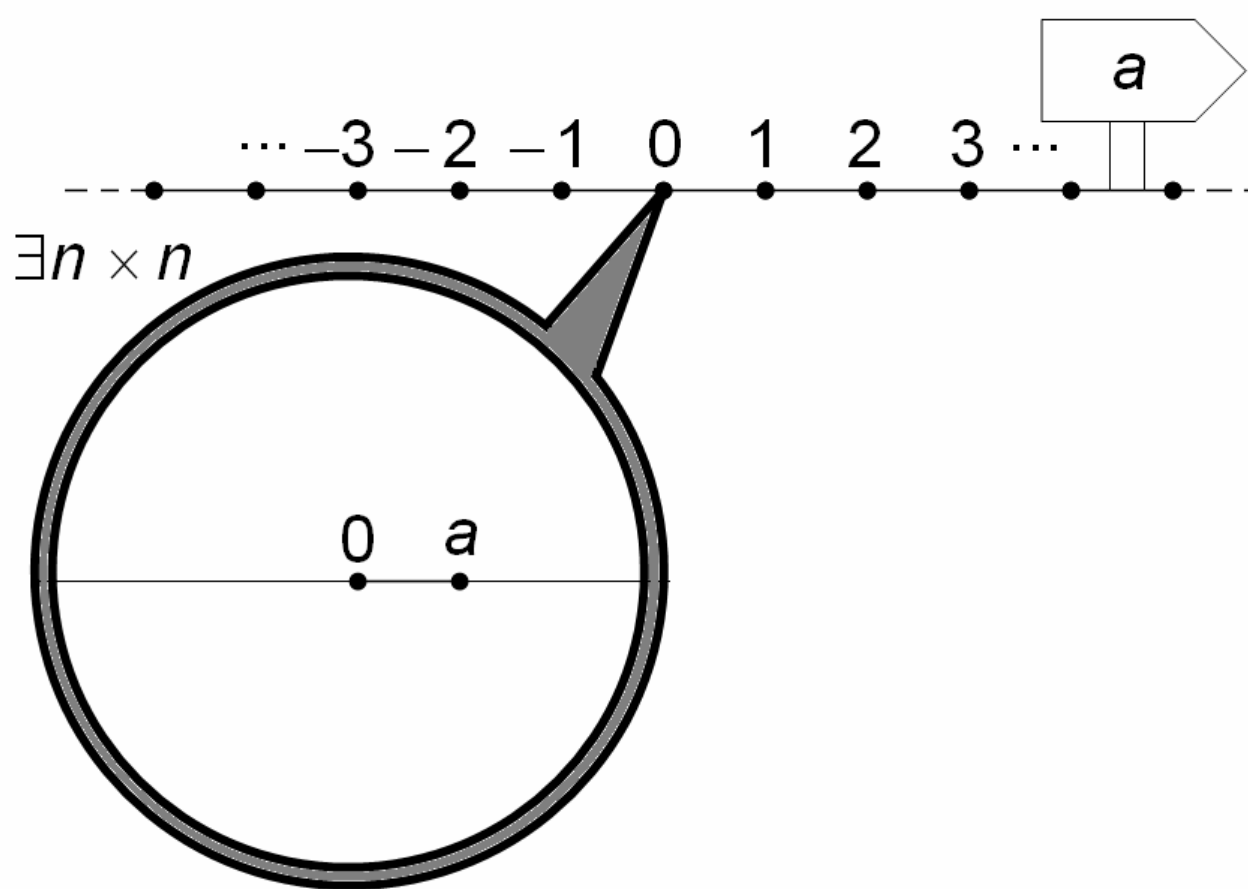


Il secondo caso, quello più fortunato, è quello in cui il numero lo vediamo nella scala ordinaria ben separato dallo zero.



Resta l'ultimo caso: quello in cui, nella scala ordinaria, il numero

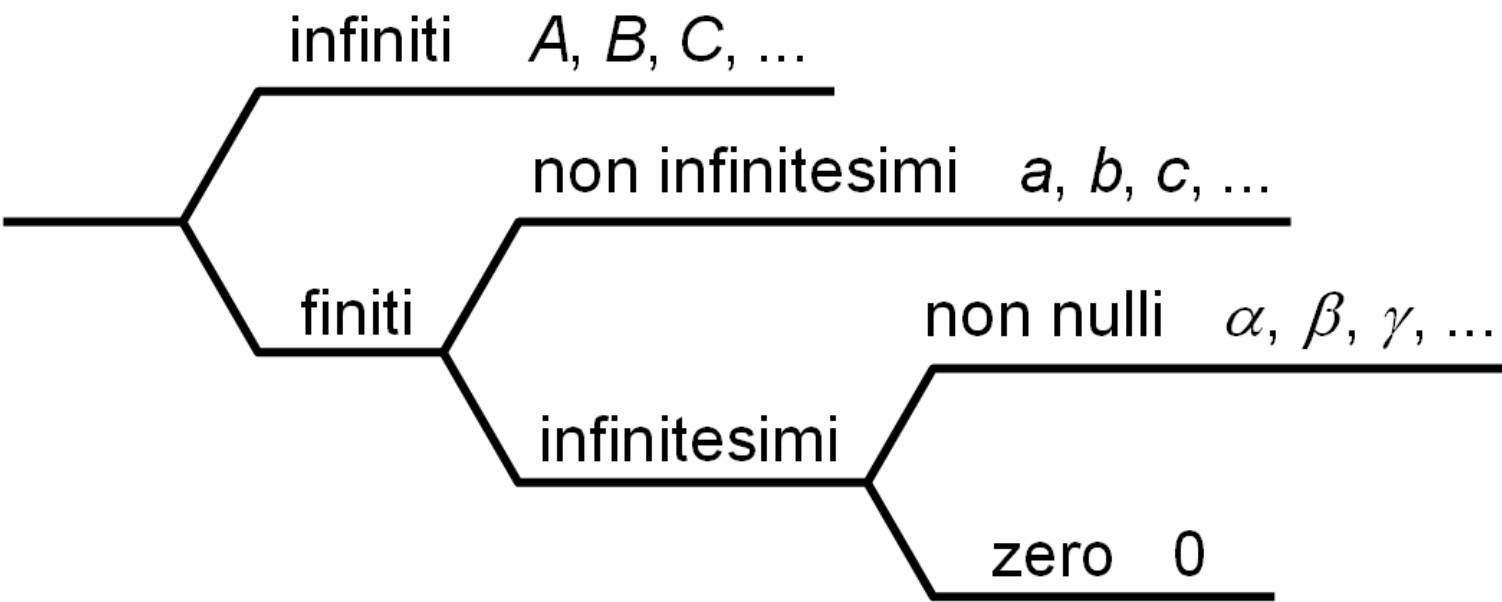
è a destra del campo visivo. Si tratta però di un numero soltanto grande, ma non infinito! Ecco allora che ci basta uno zoom standard, regolato a una scala opportuna, per farlo rientrare nel campo visivo.



Dubby:- Prof, noi abbiamo accettato che esista un numero infinitesimo positivo. Lei ci ha poi fatto vedere che allora ne esiste anche uno infinito: il suo reciproco. Ma ci ha anche detto che esistono infiniti numeri infinitesimi e infiniti numeri infiniti... Da dove saltano fuori?

Apotema:- Vi ho anticipato che saltano fuori dal combinare l'infinitesimo con i numeri standard mediante le 4 operazioni. Possiamo accettare come un postulato anche il fatto che le 4 operazioni si estendono all'infinitesimo mantenendo invariate le loro proprietà. Per fortuna, il matematico Abraham Robinson ci ha fatto la cortesia di dimostrare che si ottiene un sistema coerente di numeri. Possiamo però anche visualizzare le operazioni e darne quindi una definizione geometrica. Per oggi ci accontentiamo di studiare il caso dell'addizione. Come abbiamo visto prima, ci sono quattro tipi di numeri: gli infiniti, i finiti non infinitesimi, gli infinitesimi non nulli e, infine, lo zero, che è un infinitesimo speciale e che fa pane per conto suo. Conveniamo di indicare gli infiniti con lettere maiuscole, i finiti

non infinitesimi con lettere latine minuscole e gli infinitesimi non nulli con lettere greche minuscole. Le lettere x, y e z le usiamo invece come lettere jolly, nel senso che possono indicare un numero di qualsiasi tipo.



Usiamo poi le seguenti abbreviazioni: **I** per infinito, **f** per finito, **fni** per finito non infinitesimo, **i** per infinitesimo e **inn** per infinitesimo non nullo. Vediamo quindi di compilare la seguente tabella per l'addizione e di inserire in ogni casella il tipo di risultato che si ottiene.

+	inn	fni	I
inn			
fni			
I			

Non ho considerato lo zero, che, essendo l'elemento neutro

dell'addizione, sommato a un numero dà come risultato il numero stesso. Chiaramente, per la proprietà commutativa dell'addizione, ci sono 3 caselle che vengono semplicemente duplicate, perché corrispondono agli stessi tipi di addendi. Cominciamo allora dalla somma di due infinitesimi non nulli. Quanto fa $\text{inn} + \text{inn}$?

Svelty:- Fa ancora un infinitesimo non nullo!

Apotema:- Perché?

Svelty:- Lo vedo a occhio! Del resto, se ciascuno dei due numeri è minore di ogni numero standard positivo, lo è anche la loro somma!

Apotema:- Ribadisco: perché?

Geny:- Perché se la loro somma superasse un numero standard positivo, almeno uno dei due dovrebbe superare la metà di quel numero, che è ancora un numero standard positivo, in contraddizione col fatto che si tratti di numeri infinitesimi! -

Apotema - Allora sei d'accordo con Svelty? -

Geny (dopo qualche secondo di esitazione):- No! Siccome potrebbero anche essere di segno opposto, il risultato potrebbe anche essere zero! Tutto quello che si può dire è che la somma di due infinitesimi non nulli è un infinitesimo!

Apotema:- Aggiudicato! $\text{inn} + \text{inn} = \text{i}$. Passiamo alla somma di un finito non infinitesimo con un infinitesimo non nullo. Quanto fa $\text{fni} + \text{inn}$?

Lenty:- Non capisco cosa vuole dire quando chiede quanto fa!

Apotema:- Intendo chiedervi quale tipo di risultato si ottiene.

Svelty:- Un finito non infinitesimo!

Apotema:- Sicuro?

Svelty:- Sicurissimo!

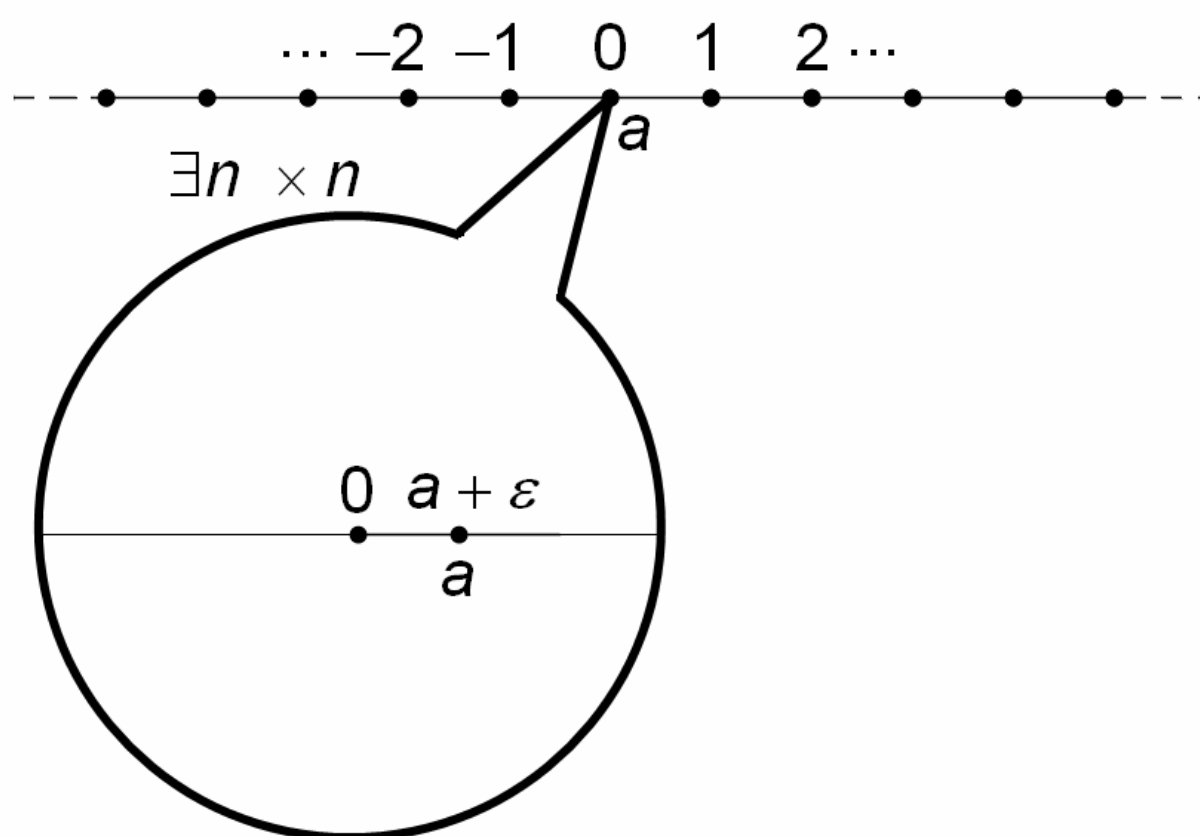
Apotema:- Sapresti mostrarlo visualizzando il risultato sulla retta?

Svelty:- Posso provare...

Apotema:- Ecco il gesso!

Svelty:- Chiamo a il finito non infinitesimo e ε l'infinitesimo non nullo. Devo far vedere che $a + \varepsilon$ è un finito non infinitesimo. Abbiamo visto che per un finito non infinitesimo ci sono tre casi possibili. Ma ... adesso che ci penso è solo uno quello che può darci dei problemi! Infatti se a è visibile ben separato dallo zero nella scala ordinaria o se è addirittura fuori del campo visivo è

ovvio che sommandogli ε , e quindi uno spostamento infinitesimo, il risultato è ancora un finito non infinitesimo! L'unico caso non ovvio è quello in cui a sembra coincidere con lo zero. In questo caso punto un microscopio standard nell'origine in modo da separare a dallo zero. In quella scala, poiché un infinitesimo è minore di ogni numero standard, il numero ε appare come un punto e quindi $a + \varepsilon$ sembra coincidere con a anche nel caso in cui a e ε abbiano segno opposto. Ne segue che $a + \varepsilon$ è un finito non infinitesimo.



Apotema:- Bene, Svelty. Tutte queste proprietà si possono dimostrare partendo dalle definizioni e usando le regole di calcolo che valevano per i numeri standard. Se vi chiedo di indovinarle c'è un motivo: la cosa più importante non è saper dimostrare queste proprietà dell'addizione, ma averne una intuizione chiara, in modo da farle proprie e da saperle usare con sicurezza. Tecnicamente, si dimostrano quasi tutte tenendo presente la proprietà che il valore assoluto di una somma è minore o uguale della somma dei valori assoluti: $|x + y| \leq |x| + |y|$. Per esempio, il primo risultato si dimostra così. Dati gli infinitesimi non nulli δ e ε , sia s un numero standard positivo qualsiasi. Poiché δ e ε sono infinitesimi e $\frac{s}{2}$

è ancora un numero standard positivo, avremo che $|\delta| < \frac{s}{2}$ e

$|\varepsilon| < \frac{s}{2}$. Ne segue che $|\delta + \varepsilon| \leq |\delta| + |\varepsilon| < \frac{s}{2} + \frac{s}{2} = s$. Dunque

$\delta + \varepsilon$ è un numero in valor assoluto minore di ogni numero positivo standard ed è quindi un numero infinitesimo. Infine, poiché $\varepsilon + (-\varepsilon) = 0$, il risultato può anche essere nullo e quindi tutto quello che si può dire è che il risultato è infinitesimo.

Svelty:- In fondo, è lo stesso ragionamento che aveva fatto Geny... Solo che non aveva usato i valori assoluti.

Apotema:- Infatti Geny aveva visto giusto. Ma ormai suona e vi lascio completare per casa la tabella dell'addizione. Mettetevi di impegno e sforzatevi di intuire il risultato con ogni mezzo a vostra disposizione. Alla prossima!

LEZIONE V

Apotema:- Avete completato la tabella dell'addizione per i tipi di numeri iperreali?

Sekky:- Vuol dire, professore, che sono questi i numeri iperreali?

Apotema:- Sono quelli che abbiamo ottenuto a partire dai numeri standard aggiungendo un infinitesimo ed estendendo le operazioni e le regole di calcolo dei numeri standard. Abbiamo visto che li possiamo classificare in 4 tipi: infiniti, finiti non infinitesimi, infinitesimi non nulli e lo zero. La lezione scorsa abbiamo visto che la somma di due infinitesimi non nulli è un infinitesimo e che la somma di un finito non infinitesimo con un infinitesimo è ancora un finito non infinitesimo. In simboli: $\text{inn} + \text{inn} = \text{i}$ e $\text{fni} + \text{inn} = \text{fni}$. Dovevate completare la tabella. Chi viene alla lavagna?

Gioky:- Vengo io, prof!

Apotema:- Ok, Gioky. Cominciamo dalla somma di un infinitesimo non nullo con un infinito.

Gioky:- Facile! Il risultato è un infinito!

Apotema:- Credo non valga la pena di perdere altro tempo su questo caso, che in simboli possiamo scrivere come $\text{inn} + \text{i} = \text{i}$. Passiamo alla somma di due finiti non infinitesimi.

Gioky:- Se hanno tutti e due lo stesso segno non c'è dubbio che la somma sia ancora un finito non infinitesimo, ma se hanno segno opposto la somma potrebbe fare zero... O anche un infinitesimo non nullo... Se da un metro e un microbo sottraggo un metro resta un microbo!

Apotema:- Quindi cosa possiamo dire del risultato?

Gioky:- Che può essere un finito non infinitesimo, un infinitesimo non nullo oppure zero.

Apotema:- Lo si può dire con una sola parola...

Svelty:- Finito!

Apotema:- Bravo Svelty. Il risultato è un finito. In simboli: $\text{fni} + \text{fni} = \text{f}$. Vedo, Gioky, che ti sei limitato a trovare i risultati affidandoti all'intuizione. È già una gran cosa, ma non hai cercato di entrare più in dettaglio?

Gioky:- Abbiamo già visto che la somma di un finito non

infinitesimo con un infinitesimo non nullo è ancora un finito non infinitesimo. Quindi se prendo $a = 7 + \varepsilon$ e $b = -7$, ecco che si tratta di due finiti non infinitesimi e la loro somma fa ε , che è un infinitesimo non nullo. Gli altri casi sono ovvi!

Apotema:- Molto bene, Gioky. Non so se Fuory si è accorto che nel fare questo esempio Gioky ha dimostrato la falsità di una sua congettura. Il numero $7 + \varepsilon$ è un numero finito non infinitesimo, ma non è un numero standard. Non è dunque vero che l'insieme dei numeri finiti non infinitesimi coincide con l'insieme dei numeri standard, zero escluso. Tutti i numeri standard, tranne lo zero, sono finiti non infinitesimi, ma non vale l'inverso!

Scetty:- Siamo sicuri che $7 + \varepsilon$ non sia standard?

Apotema:- E quale numero standard si ottiene secondo te?

Geny:- Se il risultato fosse un numero standard, allora ε sarebbe la differenza di due numeri standard e quindi sarebbe standard anche lui!

Scetty:- Ok, mi avete convinto.

Apotema:- Passiamo adesso a un altro caso banale, la somma di un finito non infinitesimo con un infinito.

Gioky:- Infinito!

Apotema:- Non ci sono dubbi! Sapresti convincere anche Scetty?

Gioky:- L'unico dubbio potrebbe venire quando i due numeri hanno segno opposto. Se, per esempio, $M > 0$ e $a < 0$, allora devo far vedere che il numero $M + a$ è un infinito. Beh, se fosse finito allora esprimerei M come differenza di finiti! Ancora, se $M + a$ fosse finito, allora potrei superarlo con un multiplo dell'unità, ma siccome $-a$ si può certamente superare con un multiplo dell'unità e la somma di due multipli è ancora un multiplo, avrei che M si potrebbe superare con un multiplo dell'unità. Impossibile!

Apotema:- Bravissimo, Gioky!

Gioky:- Resta la somma di due infiniti. Anche in questo caso, se hanno lo stesso segno non c'è dubbio che il risultato sia infinito. Ma se hanno segno opposto potrebbe essere non solo zero, ma anche infinitesimo non nullo o finito non infinitesimo! -

Apotema:- E un infinito, no?

Gioky:- Sì, anche un infinito!

Apotema:- E come convinceresti i tuoi compagni?

Gioky:- Io ho pensato così. Da qui al centro del superammasso della Vergine e da qui al centro del superammasso della Vergine più un pelo, sono due distanze infinite che differiscono per un infinitesimo! Se, invece di un pelo, vado più in là di un metro, allora la differenza di due infiniti viene un finito non infinitesimo! Se poi faccio la distanza da qui al centro del superammasso della Vergine e metà di questa distanza, ottengo che la differenza di due infiniti è ancora un infinito!

Apotema:- Convincente, ma ben poco rigoroso, ti pare?

Gioky:- Ma adesso ho capito come dovevo fare! Se prendo gli infiniti $M + \varepsilon$ e M , la loro differenza fa ε , che è un infinitesimo non nullo. Se prendo gli infiniti $M + a$ e M , la loro differenza fa a , che è un finito non infinitesimo. Se poi prendo gli infiniti $2M$ e M , la loro differenza fa M , che è ancora un infinito!

Lenty:- Non capisco come la differenza di due infiniti possa essere un infinito...

Apotema:- Non ti ha convinto la dimostrazione di Gioky? E nemmeno l'immagine suggestiva in scala cosmica? Ti farò una analogia, che come tutte le analogie funziona solo fino a un certo punto. C'è una tribù primitiva che sa contare solo fino a 4. Uno, due, tre, quattro... molti! Per esempio se, per noi che sappiamo contare, uno ha 12 pecore, in quella tribù dicono che ha molte pecore. Chiaro?

Lenty:- Chiaro, prof!

Apotema:- Quanto fa molti meno molti? Se uno ha molte pecore e gliene rubano molte, quante pecore gli restano?

Lenty:- Dipende da quante pecore ha e da quante gliene rubano!

Apotema:- Proprio così, Lenty. Se ne aveva 12 e gliene rubano 9, gliene restano 3. In quel caso $molti - molti = 3$. Se gliene rubano tutte e 12, ecco che non gliene resta nessuna. In quel caso $molti - molti = 0$. Ma... se gliene rubano 5?

Lenty:- Gliene restano 7!

Apotema:- Ecco che, in quel caso, c'erano molte pecore, ne hanno rubate molte, ne sono rimaste molte. In quel caso $molti - molti = molti$! Gioky aveva pensato al fatto che la differenza di due distanze enormi può ancora essere una distanza enorme.

Lenty:- Sto capendo...

Rozzy:- Con calma, Lenty!

Apotema:- Possiamo sintetizzare la situazione scrivendo che " $I+I=?$ ". A parole, la somma di due infiniti può essere di qualsiasi tipo.

Normy:- Significa che non si può fare?

Apotema:- No, attenzione! Dati due numeri iperreali, la loro somma esiste sempre! Potete pensare di rappresentare i due numeri con dei segmenti orientati e, partendo dall'origine, di sommarli mettendo la coda del secondo sulla punta del primo. La somma esiste sempre! Quel punto interrogativo significa semplicemente che la sola informazione che gli addendi sono infiniti non ci consente di dire nulla sul tipo del risultato. Diremo che si tratta di una forma indeterminata. La tabella è completata. La cosa importante è che non abbiate il minimo dubbio sul contenuto della tabella.

+	inn	fni	I
inn	i	fni	I
fni		fni	I
I			?

Normy:- Passiamo alla differenza?

Apotema:- Direi che la tabella che abbiamo appena visto vale sia per l'addizione che per la sottrazione. Coi numeri relativi le sottrazioni si riconducono a somme con l'opposto. Passiamo invece alla moltiplicazione. Facciamo una tabella del tutto simile alla prima. Come possiamo visualizzare la moltiplicazione? Per prima cosa vi faccio notare che la cosa veramente importante è

saper dire il tipo di risultato quando i due fattori sono positivi. Per gli altri casi basta eventualmente cambiare il segno, cosa che non cambia il tipo.

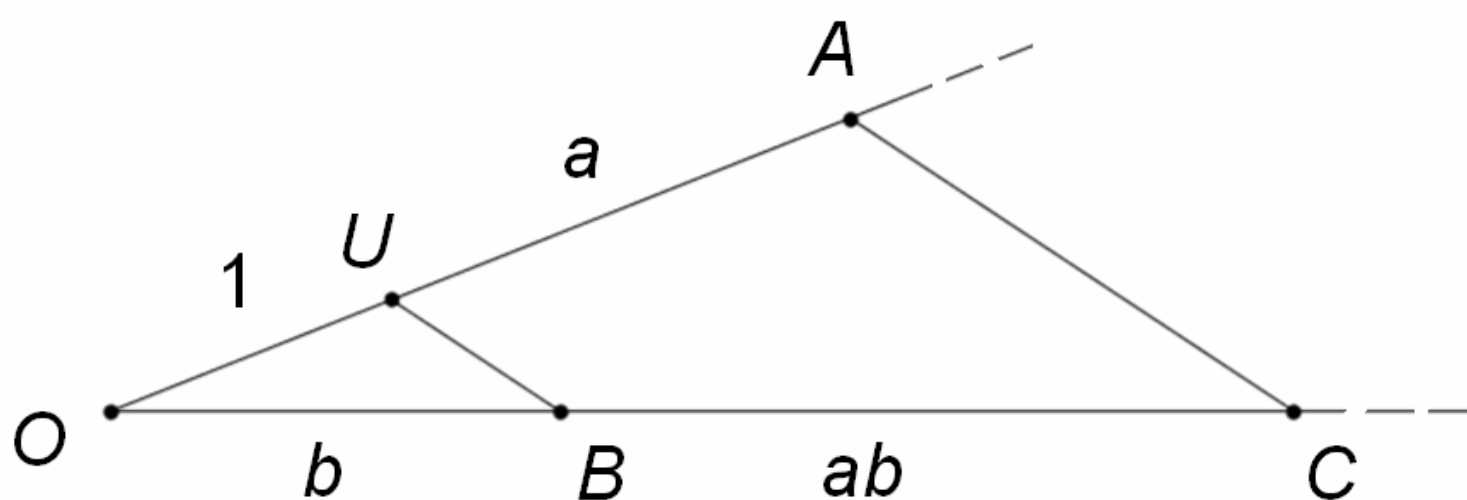
Sekky:- Possiamo rappresentare il prodotto di due numeri positivi come l'area del rettangolo che ha quelle dimensioni, professore.

Apotema:- Giustissimo, Sekky, ma possiamo anche continuare a usare dei segmenti.

Dubby:- E come si rappresenta il prodotto di due segmenti?

Apotema:- Per rappresentare il prodotto dei numeri positivi a e b , prendiamo un angolo e riportiamo su un lato, a partire dal vertice O , un segmento unitario OU e uno OA lungo a . Sull'altro lato riportiamo invece un segmento OB di lunghezza b e poi mandiamo da A la parallela a UB , che interseca OB in C . Per una nota proprietà dei fasci di rette parallele tagliate da una coppia di trasversali, nota come Teorema di Talete, il segmento BC ha lunghezza ab . Chi mi sa dire perché?

Svelty:- Per il Teorema di Talete i segmenti OB e BC sono direttamente proporzionali ai segmenti OU e UA . Siccome OB , misurando b , è b volte OU , che misura 1, allora BC è b volte UA , che misura a , e quindi misura ab !



Apotema:- Benissimo! Abbiamo così costruito un segmento che misura ab . Ma cominciamo a compilare la tabella dei prodotti. Di che tipo è il prodotto di due infinitesimi non nulli?

Ovvy:- Un infinitesimo non nullo!

Gioky:- È l'area di un rettangolo di lati infinitesimi, che sta infinite volte nel quadrato unitario!

Apotema:- Ok, $\text{inn} \times \text{inn} = \text{inn}$. Credo non valga la pena di perderci altro tempo. Concentriamoci solo sui risultati meno ovvi. Che cos'è il prodotto di un infinitesimo non nullo per un

finito non infinitesimo?

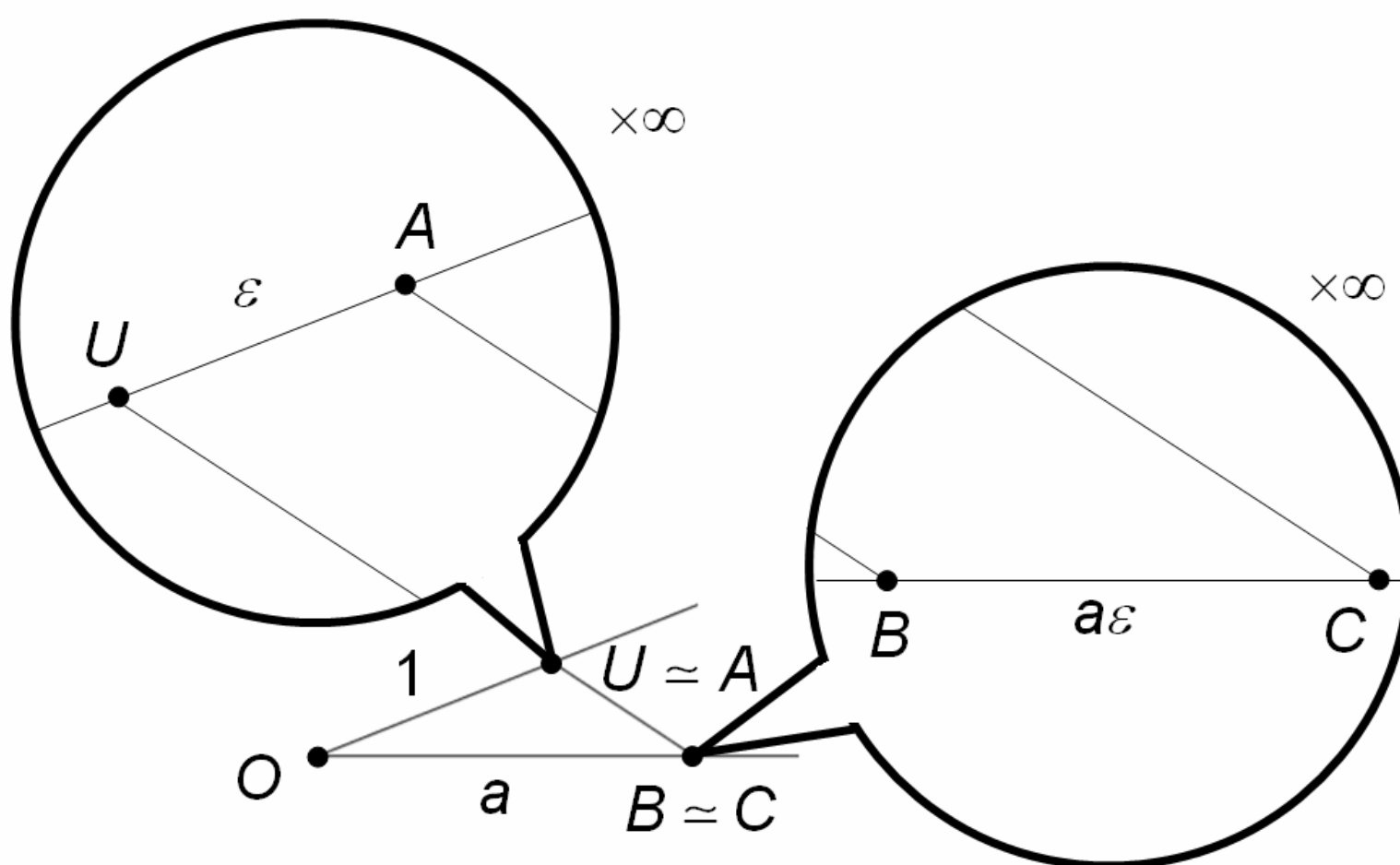
Svelty:- Un infinitesimo non nullo!

Apotema:- Tutti d'accordo?

Normy:- Verrebbe l'area di un rettangolo con un lato finito non infinitesimo e uno infinitesimo!

Gioky:- Sta infinite volte nel quadrato di lato il numero finito non infinitesimo!

Apotema:- Dunque $\text{inn} \times \text{fni} = \text{inn}$. Potete visualizzarlo in modo convincente anche con la costruzione geometrica del prodotto. Se consideriamo il prodotto εa , in questo caso il punto A è a distanza infinitesima ε da U , il segmento OB misura a e il segmento BC misura εa . Poiché i segmenti paralleli UB e AC sono a distanza infinitesima tra loro, risulta infinitesimo anche BC . La situazione può essere visualizzata con un paio di microscopi non-standard.



E cosa mi dite del prodotto di due infiniti?

(Tutta la classe):- Un infinito!!

Apotema:- Ok, $1 \times 1 = 1$. E adesso un caso interessante. Che cos'è il prodotto di un infinitesimo non nullo per un infinito?

Fuory:- Un infinito!

Geny:- Dipende da quanto grande è l'infinito e da quanto è piccolo l'infinitesimo! -

Fuory:- Ma cosa dici?

Geny:- Per esempio, se M è un infinito, allora il prodotto di $1/M$, che è un infinitesimo non nullo, per M , che è infinito, fa 1, che è finito non infinitesimo. Ma il prodotto di $1/M$ per M^2 , che è un infinito, dà come risultato M , che è un infinito!

Fuory:- Non mi dire che può venire anche un infinitesimo!

Geny:- Non nullo! Se moltiplichiamo $1/M^2$, che è un infinitesimo non nullo, per M , il risultato è $1/M$, che è un infinitesimo non nullo!

Fuory:- E se faccio zero per infinito? Perché non abbiamo messo anche lo zero nella tabella?

Apotema:- Nell'addizione non l'abbiamo messo perché il risultato era scontato e nella moltiplicazione non l'abbiamo messo ... per lo stesso motivo! Il risultato è scontato: fa sempre zero!

Dubby:- E allora cosa scriviamo nella tabella per il prodotto di un infinitesimo non nullo con un infinito?

Apotema:- Mettiamo un punto interrogativo, come avevamo fatto per la somma o per la differenza di due infiniti. Scriviamo che $\text{inn} \times \text{I} = ?$. Si tratta di quella che abbiamo chiamato una forma indeterminata. Conoscere solo il tipo dei fattori non ci dice nulla del tipo del risultato. Se invece abbiamo altre informazioni, come ci ha mostrato Geny, allora forse possiamo dire il tipo del risultato o, addirittura, il risultato stesso.

Sekky:- Restano altri due casi, professore.

Apotema:- L'unico caso impegnativo l'abbiamo ormai già visto. Di che tipo è il prodotto di due finiti non infinitesimi?

Svelty:- Finito non infinitesimo!

Apotema:- Semmai ce ne fosse bisogno, basta osservare che un finito non infinitesimo è compreso tra due numeri standard e quindi la stessa cosa succede per il prodotto di due finiti non infinitesimi. Dunque $\text{fni} \times \text{fni} = \text{fni}$. Resta il caso del prodotto di un finito non infinitesimo per un infinito.

(Tutta la classe):- Un infinito!

Apotema:- Ok, ragazzi, $\text{fni} \times \text{I} = \text{I}$. Vediamo ora l'operazione di reciproco, che in parte abbiamo già visto. In questo caso lo zero non lo includiamo, perché non è definito il reciproco dello zero.

Normy:- Ma il prof di fisica ci diceva che $1/0$ è infinito!

Apotema:- Il prof di fisica non si riferiva allo zero, ma a un infinitesimo! Abbiamo già visto che il reciproco di un infinitesimo è un infinito e che il reciproco di un infinito è un infinitesimo.

Resta solo il caso del reciproco di un finito non infinitesimo.

Svelty:- Fa un finito non infinitesimo!

Apotema:- Certo, Svelty. Dunque, $1/\text{inn} = \text{l}$, $1/\text{l} = \text{inn}$, $1/\text{fni} = \text{fni}$.

x	inn	fni	l	x	1/x
inn	inn	inn	?	inn	l
fni		fni	l	fni	fni
l			l	l	inn

Normy:- Resta solo la divisione!

Apotema:- Siccome dividere è come moltiplicare per il reciproco, la divisione diventa un semplice esercizio che vi lascio per casa. Ma vi chiedo di provare a indovinare il risultato prima di ricavarlo dalle operazioni di prodotto e di reciproco. Dovete sempre tentare di indovinare il risultato in un problema di matematica. E non solo di matematica. Buttatevi!

Sekky:- Scusi, professore, ma quello che lei ci dice è esattamente il contrario di quello che ci hanno sempre detto gli altri insegnanti: non tirate a indovinare, ma prima pensateci bene!

Apotema:- Sono certo che i colleghi si riferivano a un'altra cosa: prima di aprire bocca, pensateci! Quando vi dico di tirare sempre a indovinare non intendo dire che dovere farlo a voce alta durante un'interrogazione. Vi dico che dovete cercare di indovinare sempre mentalmente la soluzione quando vi cimentate in un problema. Sempre! Ne vale sempre la pena! Se avrete indovinato vorrà dire che la vostra intuizione è andata nella direzione giusta e l'avrete ulteriormente sviluppata. Se

avrete sbagliato, allora dovrete cercare di capire cosa c'era di sbagliato nella vostra intuizione e, così facendo, avrete comunque corretto il tiro e migliorato la vostra intuizione. L'intuizione è l'arma più potente a vostra disposizione. A volte ci inganna, ma quando capita è l'occasione per svilupparla a un livello superiore.

Gioky:- E cos'altro faremo la prossima lezione?

Apotema:- Ricordate la questione degli infinitesimi più infinitesimi di altri?

Gioky:- I peli dei microbi?

Apotema:- Più o meno. La prossima lezione impareremo a confrontare gli infinitesimi e gli infiniti.

Sogny:- Grande!

Apotema:- Alla prossima!

LEZIONE VI

Apotema:- Vieni tu, Furby, a compilare la tabella per la divisione dei numeri iperrerali?

Furby:- Ok, prof! Questa volta bisognava compilare tutte e 9 le caselle, perché non vale la proprietà commutativa...

Apotema:- Vai in ordine, cominciando dalla prima riga.

Furby:- I risultati si potevano trovare meccanicamente usando le tabelle della moltiplicazione e del reciproco, anche se lei ci ha invitato a tentare di indovinarli...

Apotema:- E tu l'hai fatto?

Furby:- Sì, prof!

Apotema:- Sentiamo.

Furby:- Il primo caso è il quoziente di due infinitesimi non nulli. Ho pensato all'immagine che ci ha suggerito Gioky del microbo e di un suo pelo per concludere che di due infinitesimi uno può essere infinitamente più grande o più piccolo dell'altro. Tirando a indovinare ho pensato che il quoziente può essere un infinitesimo non nullo, un finito non infinitesimo o un infinito e che si tratta quindi di una forma indeterminata. Imitando gli esempi di Geny dell'altra volta, ho anche mostrato che possono effettivamente verificarsi tutti i casi. Dal fatto che $\frac{\varepsilon}{\varepsilon} = 1$ segue che il quoziente di infinitesimi non nulli può essere un finito non infinitesimo. Se poi divido ε^2 , che è un infinitesimo non nullo, per ε ottengo ε , che è un infinitesimo non nullo. Infine, se divido ε per ε^2 ottengo $1/\varepsilon$, che è un infinito!

Apotema:- Benissimo. Dunque possiamo scrivere che $\frac{\text{inn}}{\text{inn}} = ?$.

Si tratta cioè di una forma indeterminata.

Furby:- Usando le tabelle della moltiplicazione e del reciproco, potevamo scrivere che $\frac{\text{inn}}{\text{inn}} = \text{inn} \times \frac{1}{\text{inn}} = \text{inn} \times \text{I} = ?$.

Apotema:- Passiamo al quoziente di un infinitesimo non nullo con un finito non infinitesimo.

Furby:- Infinitesimo non nullo! Se divido una quantità

infinitesima di mela tra un numero finito di persone ne tocca una quantità infinitesima a testa!

Apotema:- L'importante è che tu te ne sia fatta un'immagine intuitiva in grado da farti ricordare all'istante il risultato, anche se, detto fra noi, non si sa proprio cosa sia una quantità infinitesima di mela!

Gioky:- Una "melecola"!

Furby:- Usando i risultati precedenti abbiamo che

$$\frac{\text{inn}}{\text{fni}} = \text{inn} \times \frac{1}{\text{fni}} = \text{inn} \times \text{fni} = \text{inn}.$$

Apotema:- E che cos'è il quoziente tra un infinitesimo non nullo e un infinito?

Furby:- Un infinitesimo non nullo! Se divido una quantità infinitesima di mela tra infinite persone, ne tocca una quantità ancora più infinitesima a testa!

Apotema:- Aggiudicato, ma ora mostrami come ottieni il risultato dai precedenti.

Furby:- Posso dire che $\frac{\text{inn}}{1} = \text{inn} \times \frac{1}{1} = \text{inn} \times \text{inn} = \text{inn}.$

Apotema:- Passiamo al rapporto tra un finito non infinitesimo e un infinitesimo non nullo.

Furby:- Ecco, prof, volevo dirle che non vale la proprietà commutativa per la divisione, ma ho notato una cosa. I risultati delle tre caselle nell'angolo in basso a sinistra si possono ottenere immediatamente da quelli delle tre caselle situate nell'angolo in alto a destra passando al reciproco. Infatti, se scambio l'ordine, ottengo il reciproco del quoziente precedente.

Nel nostro caso, siccome $\frac{\text{inn}}{\text{fni}} = \text{inn}$, abbiamo subito che

$$\frac{\text{fni}}{\text{inn}} = \frac{1}{\text{inn}} = 1.$$

In ogni caso ho cercato di rendere intuitivo il risultato ragionando ancora con le mele: se do una quantità finita di mela a una parte infinitesima di persona, allora a una persona ne tocca una quantità infinita!

Apotema:- L'importante è che la tua visione intuitiva ti consenta di ricordare all'istante e in modo indelebile il tipo del risultato. Potrai tenerla per te, io non te la chiederò mai più!

Scetty:- Ma se uno volesse una vera dimostrazione? -

Apotema:- Dovrebbe dimostrare che il quoziente tra un finito

non infinitesimo e un infinitesimo non nullo è maggiore di ogni numero standard. Vediamolo come esercizio, ma senza dargli troppo peso. Consideriamo il quoziente $\frac{a}{\varepsilon}$, dove possiamo pensare, per semplicità, che sia a che ε siano positivi, e un numero standard positivo qualsiasi s . Dobbiamo dimostrare che $\frac{a}{\varepsilon} > s$. Siccome a non è infinitesimo, esiste almeno un numero

standard t con $a > t > 0$. Ne segue che $\frac{a}{\varepsilon} > \frac{t}{\varepsilon}$. Ora $\frac{t}{\varepsilon} > s$ se

$\varepsilon < \frac{t}{s}$, ma questo è senz'altro vero, perché ε è infinitesimo ed è

minore di ogni numero standard positivo. Avrei potuto darvi una dimostrazione analoga per ogni caso, ma non ne vale la pena. Soprattutto, come vi ho già detto, la cosa davvero importante è avere chiaro il tipo di risultato e saperlo scrivere al volo e con sicurezza ogni volta che ci capita. Ma vediamo di concludere la tabella della divisione.

Furby:- il quoziente di due finiti non infinitesimi è un finito non infinitesimo. Del resto è l'unico tipo di numero che coincide col tipo del suo reciproco.

Apotema:- Dunque $\frac{\text{fni}}{\text{fni}} = \text{fni}$. Continua pure, Furby.

Furby:- Finito non infinitesimo diviso infinito fa infinitesimo non nullo. Se divido una quantità finita di mela tra infinite persone, ne tocca una quantità infinitesima a testa! Del resto

$$\frac{\text{fni}}{\text{I}} = \text{fni} \times \frac{1}{\text{I}} = \text{fni} \times \text{inn} = \text{inn}.$$

Apotema:- Scriviamo allora che $\frac{\text{fni}}{\text{I}} = \text{inn}$.

Furby:- Passo all'ultima riga. Un infinito diviso un infinitesimo non nullo fa un infinito! Del resto se $\frac{\text{inn}}{\text{I}} = \text{inn}$, allora $\frac{\text{I}}{\text{inn}} = \text{I}$.

Stessa cosa per il caso successivo: $\frac{\text{I}}{\text{fni}} = \text{I}$.

Apotema:- E cosa mi dici dell'ultimo caso?

Furby:- Facendo un'analogia con l'aritmetica 1, 2, 3, 4, molti,

dico che molte pecore divise tra molte persone possono fare molte pecore a testa o anche solo una. Dico che è una forma indeterminata!

:	inn	fni	I
inn	?	inn	inn
fni	I	fni	inn
I	I	I	?

Apotema:- Del resto si può ricondurre al caso del quoziente di due infinitesimi, infatti $\frac{M}{N} = \frac{1/N}{1/M}$.

Furby:- Posso anche costruire facilmente degli esempi. Se divido M per M mi viene 1, che è finito non infinitesimo. Se faccio M^2 diviso M . ottengo M , che è infinito. Se invece faccio M diviso M^2 , ottengo $1/M$, che è infinitesimo.

Apotema:- Prima di andare al posto fai un paio di esercizi. Qual è il tipo dell'espressione iperreale $\frac{aM}{a+M}$?

Furby:- Abbiamo che $\frac{fni \times I}{fni + I} = \frac{I}{I} = ?$. È una forma indeterminata!

Geny:- Viene un finito non infinitesimo!

Furby:- Del quoziente di infiniti non puoi dire niente!

Geny:- Ma tu avevi altre informazioni, che non hai usato!

Apotema:- Come ha detto giustamente Geny, noi non possiamo dire nulla del quoziente di due infiniti quando l'unica informazione che abbiamo è che si tratta di due infiniti. Ma, nel nostro caso, sappiamo molto di più. Sentiamo come ha ragionato Geny.

Geny:- Ho pensato che il denominatore è praticamente M , per cui il quoziente è circa a , che è un finito non infinitesimo.

Apotema:- Come sempre, Geny ha visto più lontano. Impareremo nelle prossime lezioni a ragionare in questo modo. Quello che possiamo fare con le conoscenze che abbiamo ora è far precedere un passaggio algebrico alla valutazione del tipo di risultato. L'idea è quella di evidenziare il termine che ha peso maggiore e scrivere che

$$\frac{aM}{a+M} = \frac{aM}{M\left(\frac{a}{M}+1\right)} = \frac{a}{\frac{a}{M}+1}.$$

L'analisi dei tipi ci porta a scrivere

$$\frac{\text{fni}}{\frac{\text{fni}}{1} + \text{fni}} = \frac{\text{fni}}{\text{inn} + \text{fni}} = \frac{\text{fni}}{\text{fni}} = \text{fni}.$$

Il metodo intuito da Geny è di gran lunga più potente e conciso!

Geny:- In realtà avevo riconosciuto che si trattava della formula per la resistenza equivalente del parallelo di due resistenze. Se una delle due è infinita, allora è come un circuito aperto ed è come se ci fosse solo l'altra. Il parallelo tra due resistenze a e M è praticamente solo a !

Apotema:- Bravissimo!

Furby:- Vado al posto?

Apotema:- Un altro esercizio! Qual è il tipo dell'espressione

iperreale $\frac{\beta + \beta^2}{2\beta + \beta^3}$?

Furby:- Allora... $\frac{\text{inn} + \text{inn}^2}{\text{fni} \times \text{inn} + \text{inn}^3} = \frac{\text{inn} + \text{inn}}{\text{inn} + \text{inn}} = \dots$ Se non sbaglio,

la somma di due infinitesimi non nulli possiamo solo dire che è un infinitesimo, vero?

Apotema:- Se non sappiamo nient'altro! In questo caso hai già perso buona parte delle informazioni che avevi...

Svelty:- Conviene prima raccogliere e semplificare!

Furby:- Ok! Raccolgo β a numeratore e denominatore...

$$\frac{\beta + \beta^2}{2\beta + \beta^3} = \frac{\beta(1 + \beta)}{\beta(2 + \beta^2)} = \frac{1 + \beta}{2 + \beta^2}.$$

Adesso faccio l'analisi dei tipi...

$\frac{\mathbf{fni} + \mathbf{inn}}{\mathbf{fni} + \mathbf{inn}} = \frac{\mathbf{fni}}{\mathbf{fni}} = \mathbf{fni}$. Anche questa volta si tratta di un finito non infinitesimo.

Apotema:- Impareremo presto a procedere molto più speditamente e a dare una risposta molto più precisa. Ma passiamo adesso al confronto di infinitesimi. Quale operazione fate tra due numeri per confrontarli?

Fuory:- La differenza!

Apotema:- Se due lunghezze differiscono di un centimetro, sono circa uguali o molto diverse?

Normy:- Dipende! Non si può dire!

Apotema:- Giusto, Normy. Una lunghezza di 11 millimetri e una di un millimetro differiscono di un centimetro, ma la prima è 11 volte più grande della seconda. Una lunghezza di un chilometro e una di un chilometro e un centimetro differiscono di un centimetro, ma sono praticamente uguali. La differenza non ci dice nulla!

Normy:- È il quoziente che ci dice se sono circa uguali o molto diversi!

Apotema:- Proprio così. Oggi vogliamo imparare a confrontare gli infinitesimi non nulli. Ne faremo dunque il quoziente.

Sekky:- Ma è una forma indeterminata, professore!

Apotema:- Non importa. Vorrà dire che ci saranno diversi casi. Consideriamo dunque due infinitesimi non nulli ε e δ . Per il

loro rapporto $\frac{\varepsilon}{\delta}$ ci sono tre possibilità: può essere un infinitesimo non nullo, un finito non infinitesimo o un infinito.

Cominciamo dal primo caso, quello in cui $\frac{\varepsilon}{\delta}$ è un infinitesimo

non nullo. Questo significa che ε non solo è infinitesimo, ma è infinitesimo anche rispetto a δ . Diremo allora che ε è un infinitesimo di ordine superiore a δ e scriveremo $\varepsilon = o(\delta)$.

Cerchiamo di visualizzare la situazione nel caso in cui i due infinitesimi siano positivi. Nella scala ordinaria sia ε che δ sembrano coincidere con lo zero e nessun microscopio standard è in grado di separarli dallo zero. Prendiamo allora un microscopio non-standard centrato nello zero e agiamo delicatamente sulla manopola dell'ingrandimento. Il primo

numero che riusciamo a separare dallo zero è... ditemelo voi!

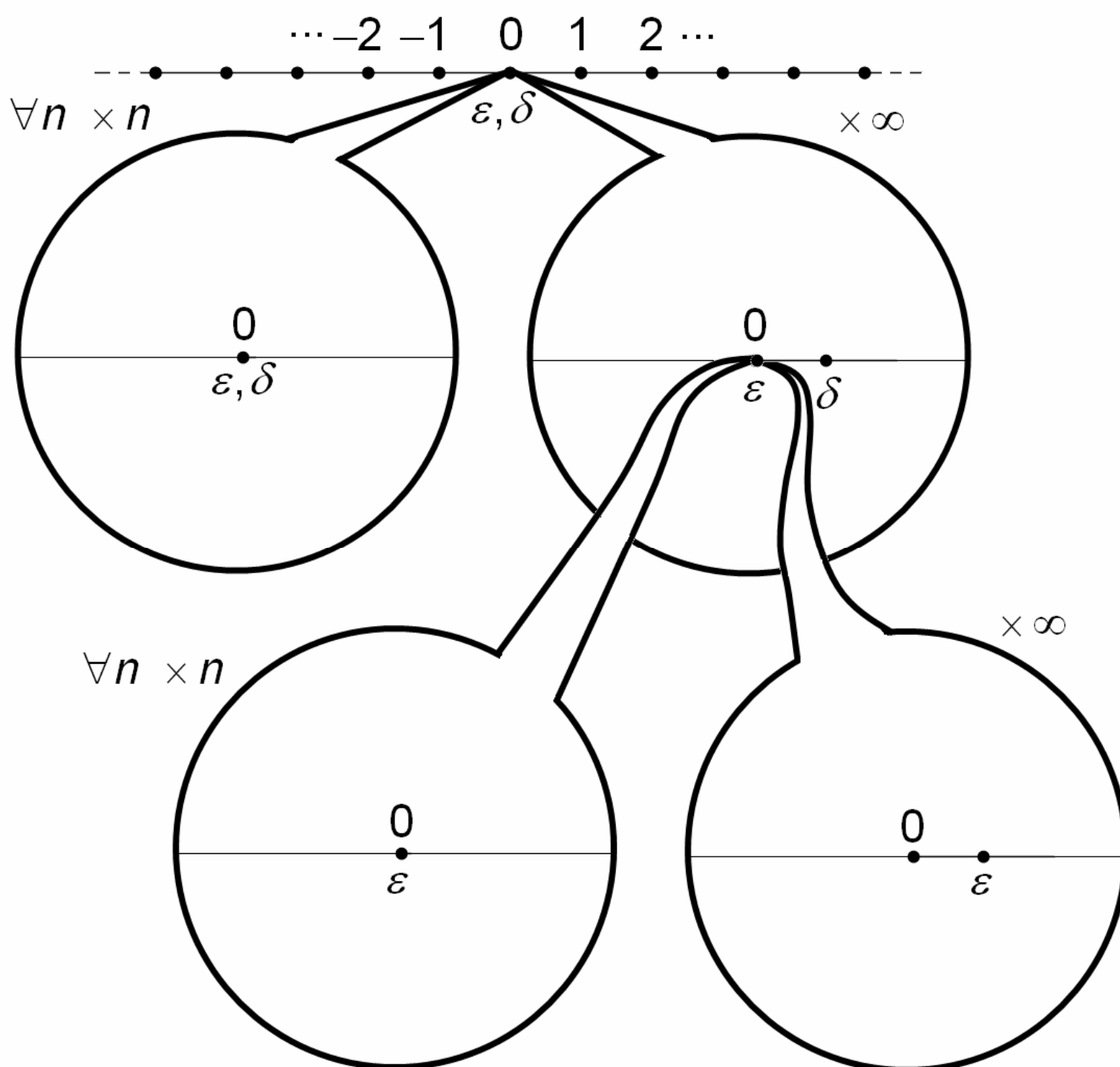
Fuory:- Epsilon!

Gioky:- No! Delta! Epsilon è infinitamente più piccolo di delta!

Apotema:- Esatto, Gioky. Adesso nel campo visivo del microscopio non-standard il numero δ compare separato dallo zero. E il numero ε ?

Svelty:- Sembra ancora coincidere con lo zero!

Apotema:- Se puntiamo un microscopio standard nel campo visivo del microscopio non-standard, riusciamo a separare ε dallo zero?



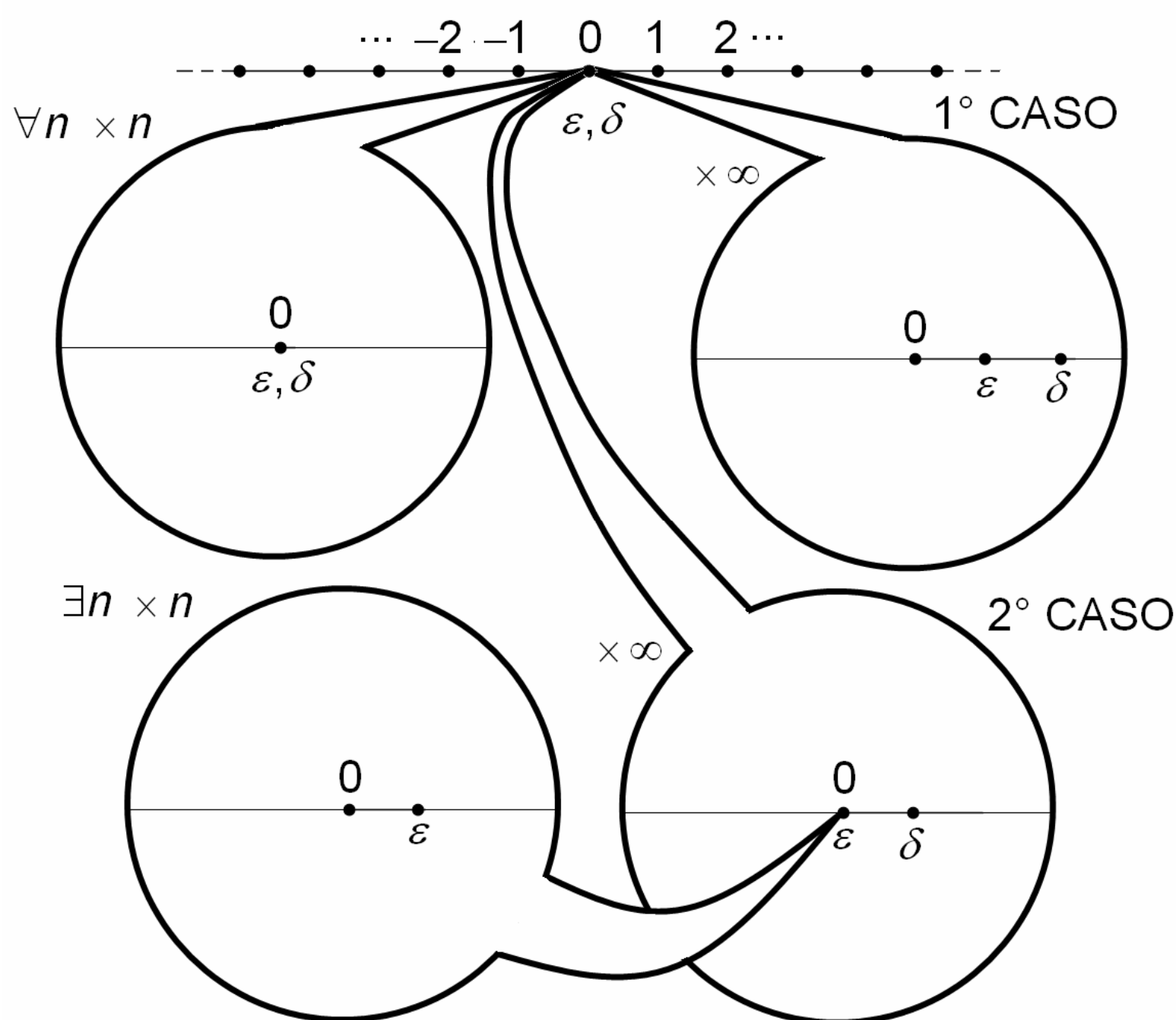
Gioky:- No! Con nessun ingrandimento finito! Perché nella scala dove δ risulta visibile ben separato dallo zero, ε è ancora un infinitesimo! Solo con un altro microscopio non-standard riusciamo a separare ε dallo zero!

Apotema:- Benissimo. E se, nella scala dell'ultimo microscopio non-standard, volessi rivedere δ , cosa dovrei usare?

Svelty:- Uno zoom non-standard o un telescopio non standard! Nella scala dove ε è visibile ben separato dallo zero, il numero δ è un infinito!

Apotema:- Vedo che cominciate a ingranare proprio bene con gli iperreali!

Gioky:- Quei microscopi sono davvero formidabili!



Apotema:- Passiamo al secondo caso, quello in cui $\frac{\varepsilon}{\delta}$ è un finito non infinitesimo. Questo significa che il rapporto è, in valore assoluto, compreso tra due numeri standard positivi s e t . Dunque $s < \left| \frac{\varepsilon}{\delta} \right| < t$ e quindi $s|\delta| < |\varepsilon| < t|\delta|$. In altre parole,

$|\varepsilon|$ è compreso tra s volte $|\delta|$ e t volte $|\delta|$ e questo significa che, rispetto a δ , ε non è né un infinitesimo né un infinito. Diciamo allora che i due infinitesimi sono dello stesso ordine. Si tratta ovviamente di una situazione simmetrica, perché se $\frac{\varepsilon}{\delta}$ è un finito non infinitesimo, lo è anche $\frac{\delta}{\varepsilon}$.

Gioky:- Proviamo a visualizzare la situazione al microscopio?

Apotema:- Per semplicità, consideriamo il caso in cui ε e δ siano entrambi positivi e supponiamo che sia $\varepsilon < \delta$. Ancora una volta, se rappresentiamo la retta nella scala ordinaria, ε e δ sembrano coincidere con l'origine e, ancora una volta, nessun microscopio standard riesce a separare i due numeri dallo zero. Questa volta però, se puntiamo nello zero un microscopio non-standard, si possono presentare due casi. Il primo caso è quello in cui, agendo delicatamente sulla manopola dell'ingrandimento, riusciamo a separare sia δ che ε dallo zero, cioè a vederli entrambi nel campo visivo ben separati dallo zero. Il secondo caso è quello in cui separiamo δ dallo zero, ma, nella scala dove compare nel campo visivo ben separato dallo zero, ε continua a sembrare coincidere con lo zero. Ma questa volta, nella scala di δ , ε è solo "piccolo", non "infinitamente piccolo"!

Svelty:- Ci basta un microscopio standard per separarlo dallo zero!

Apotema:- Esattamente. Puntando un microscopio standard nello zero del campo visivo del microscopio non standard, con un opportuno ingrandimento finito, riusciamo a separare ε dallo zero.

Gioky:- Formidabile! Divertenti questi numeri iperreali!

Apotema:- Il terzo caso, infine, è quello in cui il rapporto $\frac{\varepsilon}{\delta}$ è un infinito. Questo significa che ε , nella scala di δ , è un infinito. Si tratta quindi del primo caso con ε e δ scambiati di ruolo. Diciamo che ε è un infinitesimo di ordine inferiore a δ , oppure, che δ è un infinitesimo di ordine superiore a ε . Scriviamo quindi che $\delta = o(\varepsilon)$.

Dubby:- C'è una cosa che non capisco!

Apotema:- Quale?

Dubby:- Perché diciamo che un infinitesimo è di ordine superiore a un altro quando è in realtà più piccolo?

Apotema:- Il termine "superiore" si riferisce al grado di infinitesimo.

Dubby:- Appunto! Io avrei detto "inferiore"!

Apotema:- Immagina che il circo che ogni anno viene qui di fianco alla scuola reclamizzi l'esibizione del nano più alto del mondo, un metro e ottanta! Pensi che ci andrebbero in molti a vedere il nano più alto del mondo?

Dubby:- Non penso proprio! Io andrei al massimo a vedere il nano più basso del mondo!

Apotema:- Vedi, Dubby, qual è la questione? Il nano più nano è quello più basso. Altrettanto, l'infinitesimo più infinitesimo è quello più piccolo. Per gli infinitesimi è motivo di vanto essere più infinitesimi degli altri. L'attributo "superiore" si riferisce a questo punto di vista.

Dubby:- Adesso ho capito, prof!

Apotema:- Vi lascio per casa il confronto di infiniti. Dovrebbe ormai essere chiaro come si procede, no?

Normy:- Si fa il quoziente, che è una forma indeterminata e si considerano i tre casi possibili!

Apotema:- Esattamente. E per visualizzare le diverse situazioni si useranno gli zoom invece dei microscopi.

Gioky:- E l'infinito di ordine superiore sarà quello più grande! Nessuno andrebbe a vedere il gigante più basso del mondo!

Furby:- Magari era sempre il nano più alto del mondo che fa un doppio lavoro!

LEZIONE VII

Apotema:- Chi viene alla lavagna a mostrare come si confrontano due infiniti?

Scopry:- Posso venire io, prof?

Apotema:- Certo, Scopry! Vedi di spiegare per bene quello che hai fatto.

Scopry:- Dati due infiniti M e N , per confrontarli, ne facciamo il rapporto $\frac{M}{N}$. Si possono presentare tre casi per il tipo del risultato: infinito, finito non infinitesimo e infinitesimo non nullo.

Se $\frac{M}{N}$ è un infinito, significa che M è infinitamente più grande di N e si dirà che M è un infinito di ordine superiore a N .

Apotema:- Esattamente. Sai visualizzare la situazione?

Scopry:- Se disegno la retta nella scala ordinaria, i numeri M e N sono a destra del campo visivo e, essendo infiniti, restano a destra del campo visivo anche usando uno zoom standard, a qualsiasi scala. Solo usando uno zoom non-standard riesco a far entrare nel campo visivo per primo il numero N .

Apotema:- Immagino che tu stia facendo l'ipotesi che si tratti di numeri positivi...

Scopry:- Sì! Non l'ho detto, ma è così. Nella scala in cui N compare nel campo visivo ben separato dallo zero, M appare un infinito. Se punto nel campo visivo dello zoom non-standard uno zoom standard ecco che, a qualsiasi scala, il numero M rimane sempre a destra del campo visivo. Solo usando un altro zoom non-standard riesco a far rientrare M nel campo visivo.

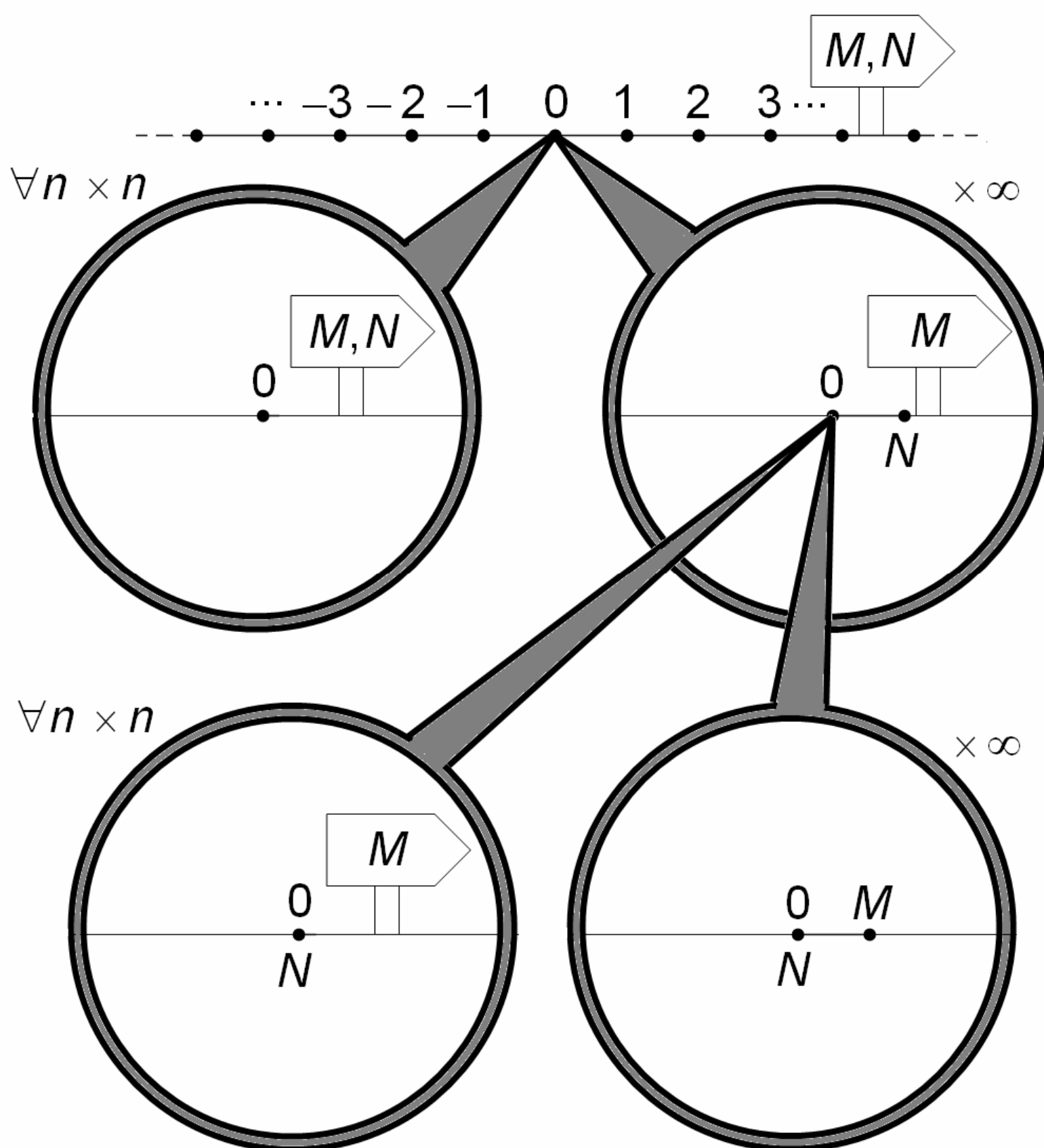
Apotema:- Benissimo, Scopry. E, dimmi un po', in quest'ultima scala cosa ne è di N ?

Scopry:- È un infinitesimo! Non riesco a separarlo dall'origine con nessun microscopio standard e devo usare invece un microscopio non-standard.

Apotema:- Perfetto! Passiamo al secondo caso, quello in cui il rapporto è un finito non infinitesimo.

Scopry:- Ho seguito il percorso fatto per il confronto di due infinitesimi. Se il rapporto è finito non infinitesimo, allora M nella

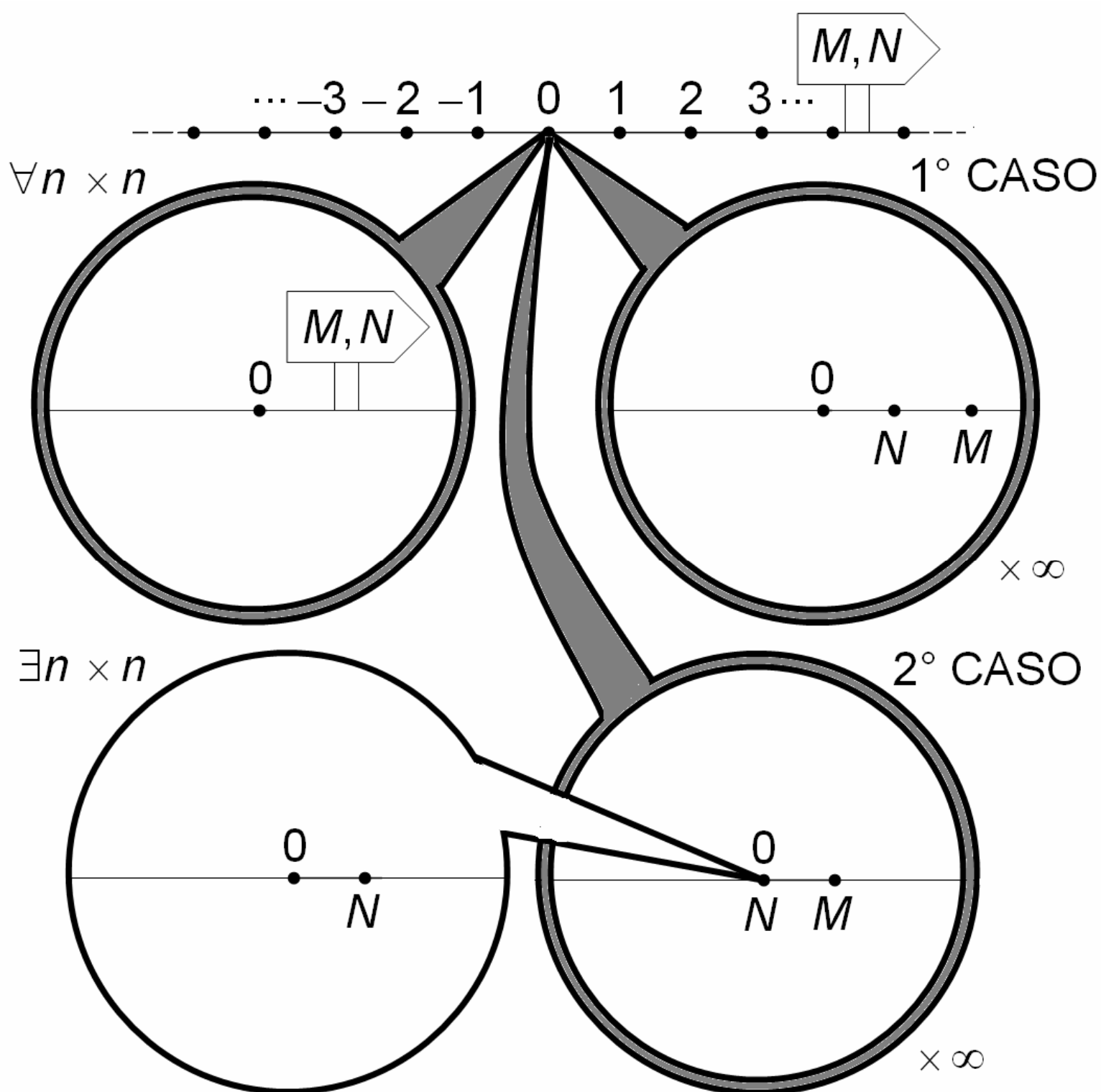
scala in cui N è visibile ben separato dallo zero, non è né un infinito né un infinitesimo. Si dirà che sono due infiniti dello stesso ordine.



Apotema:- Proprio così. E sapresti visualizzare la situazione sulla retta iperreale?

Scopry:- Anche questa volta suppongo che M e N siano positivi e, inoltre, che sia $M > N$. Se considero la retta nella scala ordinaria, i numeri M e N sono a destra del campo visivo e restano a destra del campo visivo di qualsiasi zoom standard. Se adesso uso uno zoom non standard e regolo lentamente la manopola dell'ingrandimento fino a far entrare M nel campo

visivo, ben separato dall'origine, si presentano due possibilità. La prima è che anche N risulti ancora ben separato dall'origine. La seconda è che, per fare entrare anche M nel campo visivo dello zoom, N sembri coincidere con l'origine. In quest'ultimo caso, però, mi basterà puntare un microscopio standard nello zero del campo visivo dello zoom per separare N dallo zero!



Apotema:- Il terzo caso, quello in cui il rapporto $\frac{M}{N}$ sia infinitesimo, si riconduce al primo scambiando M con N . Diremo che M è un infinito di ordine inferiore a N .

Dubby: Scusi, prof, ma lei prima ha parlato della retta iperreale. Voleva dire la retta su cui rappresentiamo i numeri iperreali?

Apotema:- Sì. Avevamo chiamato retta reale un modello di retta

i cui punti erano in corrispondenza biunivoca con l'insieme $\mathbf{R}$ dei numeri reali. Chiamiamo retta iperreale un modello di retta i cui punti sono in corrispondenza biunivoca con l'insieme ${}^*\mathbf{R}$ dei numeri iperreali. Insomma, la retta che possiamo esplorare con gli strumenti ottici standard e non-standard. I numeri reali sono i numeri standard e i numeri iperreali non reali sono i numeri non-standard. In particolare, sono numeri non-standard tutti gli infiniti e tutti gli infinitesimi non nulli, ma anche parte dei finiti non infinitesimi.

Normy:- E cosa ci resta ancora da sapere sugli iperreali, adesso che abbiamo visto le operazioni?

Apotema:- Non siamo ancora pronti per affrontare in modo sistematico il calcolo infinitesimale. Ricordate i problemi introduttivi? Un fatto importante era quello di considerare un numero standard infinitamente vicino a un numero iperreale finito. Dobbiamo arrivare a chiarire questa ed altre questioni. Cominciamo col definire un paio di relazioni sui numeri iperreali. La prima è quella di essere infinitamente vicini. Diremo che x è infinitamente vicino a y se la loro distanza è infinitesima, e cioè se il numero $|x - y|$ è infinitesimo. Ovviamente, questo equivale a chiedere che sia infinitesimo $x - y$ oppure $y - x$. Per indicare che x è infinitamente vicino a y , scriveremo $x \simeq y$. È immediato verificare che ogni numero è infinitamente vicino a se stesso, cioè che $x \simeq x$.

Ovvy:- Grazie! La distanza è zero!

Apotema:- Altrettanto immediato è verificare che se $x \simeq y$, allora anche $y \simeq x$. La simmetria è già implicita nella definizione! Oltre alla proprietà riflessiva e simmetrica appena enunciate, vale anche la proprietà transitiva. Se $x \simeq y$ e $y \simeq z$, allora $x \simeq z$.

Ovvy:- La somma di due infinitesimi è ancora un infinitesimo!

Apotema:- Chiamiamo monade di un numero iperreale l'insieme di tutti i numeri che gli sono infinitamente vicini. La monade di x la indichiamo con $mon(x)$. Per esempio, nel campo visivo di un microscopio non-standard puntato sulla retta nella scala ordinaria vediamo numeri di una stessa monade. Chi mi sa dire che cos'è $mon(0)$, cioè la monade dello zero?

Svelty:- È l'insieme di tutti i numeri infinitesimi! Dire che un

numero è infinitesimo o che è a distanza infinitesima dallo zero è la stessa cosa!

Apotema:- Esattamente. Ci riferiremo alla monade dello zero come alla monade principale. Più in generale, la monade del numero x è fatta da tutti i numeri del tipo $x + \delta$, dove δ è un infinitesimo, eventualmente nullo. Una specie di alone infinitesimo che circonda un numero. Affermare che due numeri appartengono a una stessa monade equivale ad affermare che sono infinitamente vicini. In particolare, affermare che x è infinitesimo equivale ad affermare che $x \simeq 0$. Useremo dunque spesso questa scrittura per indicare che x è infinitesimo.

Scetty:- Ma le monadi si possono sovrapporre?

Apotema:- No. Le proprietà precedenti ci garantiscono che due monadi distinte non si sovrappongono. Infatti, se $mon(x)$ e $mon(y)$ avessero un numero z in comune, questo numero sarebbe allo stesso tempo infinitamente vicino sia a x che a y , ma allora anche x e y sarebbero infinitamente vicini e apparterebbero alla stessa monade. Ogni numero iperreale appartiene a una monade e le monadi sono tutte disgiunte fra loro. Avreste dovuto ricordarvi che una relazione binaria riflessiva, simmetrica e transitiva su un insieme è una relazione di equivalenza e che il suo effetto è quello di suddividere l'insieme in parti non vuote e a due a due disgiunte, dette classi di equivalenza. Vi chiedo ora se in una monade possono esserci due numeri standard distinti.

Scetty:- Dovrebbero essere infinitamente vicini...

Apotema:- La domanda è allora se due numeri standard possono essere infinitamente vicini!

Svelty:- No di certo! La loro differenza dovrebbe essere un numero standard infinitesimo, ma l'unico numero standard infinitesimo è lo zero!

Scetty:- Del resto la differenza di due numeri standard o è zero o è un numero standard diverso da zero e quindi non infinitesimo.

Apotema:- Bene. E, secondo voi, possono esistere monadi che non contengono nessun numero standard?

Svelty:- Certamente! Se prendo la monade di un infinito M , i numeri della monade sono tutti del tipo $M + \delta$ e quindi sono tutti infiniti e quindi di sicuro sono non-standard!

Apotema:- Bravissimo! Dunque una monade può contenere al massimo un numero standard. In particolare, le monadi degli infiniti di sicuro non contengono numeri standard. Si può invece dimostrare che le monadi dei numeri finiti contengono tutte un numero standard. In altre parole, ogni numero finito x può essere espresso in modo unico nella forma $x = s + \delta$, dove s è un numero standard e δ è un infinitesimo eventualmente nullo. Il numero s è la parte standard di x , mentre il numero δ è la parte infinitesima di x . La parte standard di x si indica con $st(x)$.

Gioky:- Un po' come la parte intera e la parte decimale di un numero reale!

Apotema:- Una analogia molto interessante la tua, Gioky, anche se con clamorose differenze. Per esempio, la parte standard della somma di due numeri finiti è la somma delle parti standard dei due numeri, mentre la parte intera della somma di due numeri standard è, in generale, diversa dalla somma delle parti intere. In formule, $st(x + y) = st(x) + st(y)$, mentre, in generale, $\lfloor x + y \rfloor \neq \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor$.

Geny:- Perché la somma di due infinitesimi è ancora un infinitesimo, mentre la somma di due parti decimali può raggiungere o superare l'unità!

Apotema:- Hai colto nel segno, Geny. Vale la pena di vedere in dettaglio quanto osservato da Geny. Siano x e y due numeri finiti, e siano $s = st(x)$ e $t = st(y)$. Allora sarà $x = s + \delta$ e $y = t + \varepsilon$, dove δ e ε sono due infinitesimi. Avremo che

$$x + y = s + \delta + t + \varepsilon = (s + t) + (\delta + \varepsilon),$$

ma $s + t$ è un numero standard e $\delta + \varepsilon$ è un infinitesimo. Ne segue che $s + t$ è la parte standard di $x + y$ e quindi che

$$st(x + y) = st(x) + st(y).$$

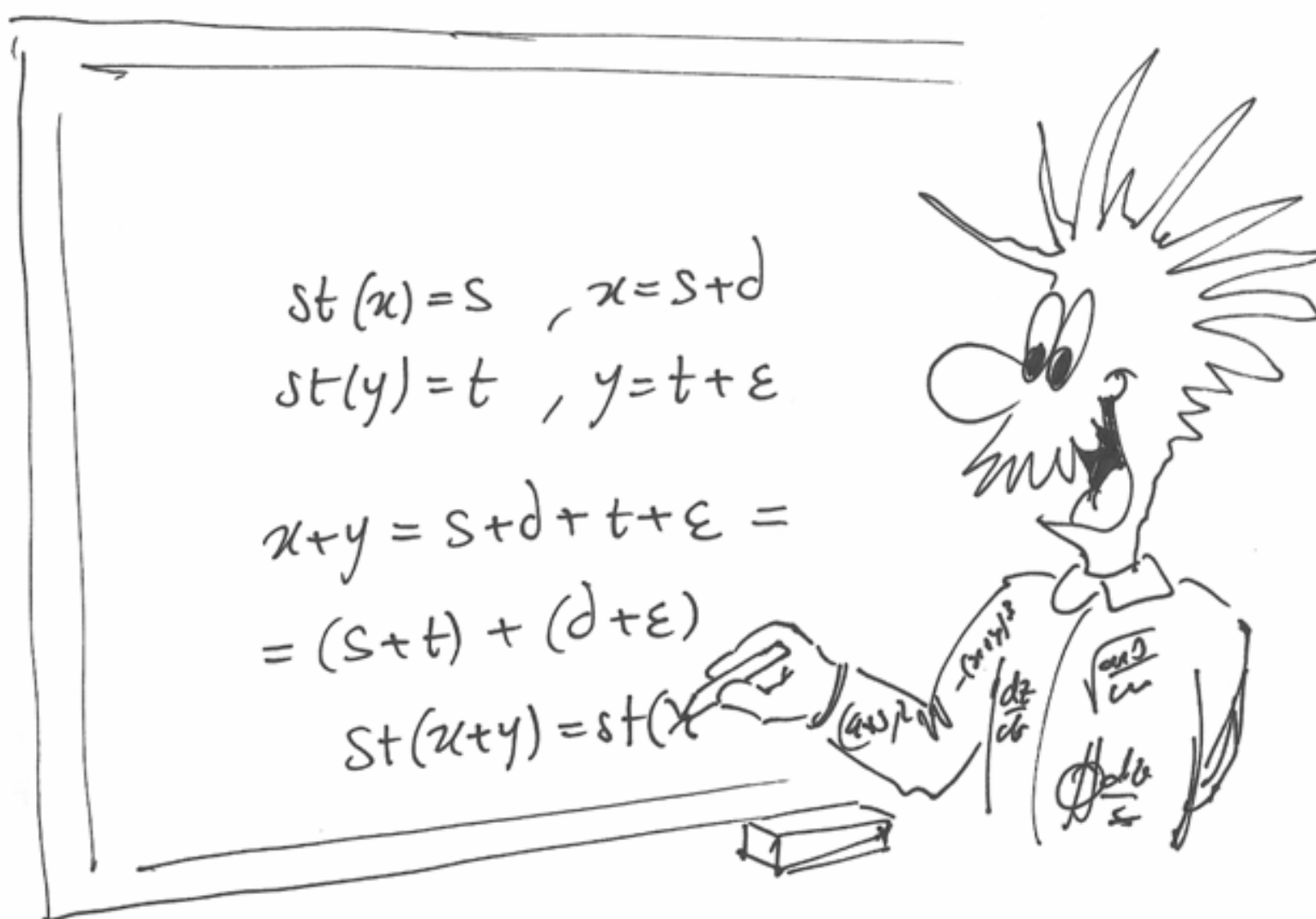
Consideriamo invece i numeri standard $x = 2.7$ e $y = 3.4$. Abbiamo che $\lfloor x \rfloor = 2$ e $\lfloor y \rfloor = 3$, mentre le parti decimali valgono rispettivamente 0.7 e 0.4. Facendo la somma ricaviamo che

$$x + y = 2 + 0.7 + 3 + 0.4 = (2 + 3) + (0.7 + 0.4) = 5 + 1.1!$$

La somma delle parti decimali ha fornito un'altra unità! In questo caso, infatti, $\lfloor x + y \rfloor = \lfloor 6.1 \rfloor = 6$, mentre $\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor = 2 + 3 = 5$.

L'analogia suggerita da Gioky è senz'altro interessante, ma bisogna stare molto attenti al fatto che la parte standard gode di

proprietà molto più semplici della parte intera. Alcune proprietà invece rispettano del tutto l'analogia. Per esempio un numero standard è intero se e soltanto se coincide con la sua parte intera e un numero finito è standard se e solo se coincide con la sua parte standard. Un numero standard è una parte decimale se e solo se la sua parte intera è zero e un numero finito è infinitesimo se e solo se la sua parte standard è zero.



Come esercizio per casa provate a dimostrare che valgono le seguenti proprietà, dove x e y sono numeri finiti. Provate anche a vedere quali di queste proprietà si possono trasporre al caso della parte intera.

- 1) $st(-x) = -st(x)$;
- 2) $st(x - y) = st(x) - st(y)$;
- 3) $st(xy) = st(x)st(y)$;
- 4) $st\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{st(x)}{st(y)}$, se y non è infinitesimo;
- 5) Se $st(x) > 0$, allora $x > 0$;
- 6) Se $x > 0$, allora $st(x) \geq 0$.

Se ricordate, nei problemi introduttivi, avevamo trovato un'espressione che adesso diremmo non-standard per la pendenza della retta passante per due punti infinitamente vicini di una parabola o per la somma delle aree di infiniti rettangoli di basi infinitesime. In ciascuno dei due casi, il risultato cercato, e cioè la pendenza della retta tangente o l'area del triangolo parabolico, era dato dall'unico numero standard infinitamente vicino al numero iperreale approssimato trovato. Adesso possiamo dire che il risultato era dato dalla parte standard dell'espressione iperreale approssimata.

Normy:- Allora adesso abbiamo finalmente tutto quello che ci serve per calcolare con gli infiniti e con gli infinitesimi?

Apotema:- Quasi. Mancano ancora alcuni concetti importanti e molto utili. Vediamo adesso un'altra relazione importante, quella di essere finitamente vicini. Diciamo che due numeri x e y sono a distanza finita o finitamente vicini, se la loro distanza è un numero finito, e cioè se $|x - y|$ è un numero finito. Anche questa volta è immediato verificare che si tratta di una relazione di equivalenza, cioè di una relazione riflessiva, simmetrica e transitiva. Le classi di equivalenza in questo caso sono tutti i numeri a distanza finita da un numero dato e prendono il nome di galassie. La galassia del numero x si indica con $Gal(x)$.

Sogny:- Galassie? Come mai si chiamano galassie?

Apotema:- Un termine molto suggestivo. La galassia di un numero è l'insieme dei numeri che possono essere visti da quel numero usando un telescopio standard. Per vedere fuori della galassia occorre invece usare un telescopio non-standard.

Sogny:- Fantastico!

Apotema:- Chi mi sa dire che cos'è $Gal(0)$, cioè la galassia dello zero?

Dubby:- Si tratta sempre della galassia del numero 1, no? O anche di 1000! Dire che due numeri stanno nella stessa galassia è la stessa cosa di dire che sono a distanza finita. -

Apotema:- Concludi! Che cos'è la galassia dello zero? O di mille?

Svelty:- È l'insieme dei numeri finiti!

Fuory:- E quindi dei numeri standard!

Apotema:- Buona la prima! Un numero è finito se e solo se è a distanza finita dallo zero, ma, ancora una volta, Fuory ha

dimenticato che esistono numeri finiti non-standard!

Fuory:- Acc...

Apotema:- La galassia dello zero, e quindi la galassia dei numeri finiti, è chiamata galassia principale.

Sekky:- È però corretto dire che tutti i numeri standard appartengono alla galassia principale! Vero, professore?

Apotema:- Vero, Sekky.

Fuory:- Ma allora esistono due galassie! Quella principale e quella con gli infiniti!

Apotema:- Assolutamente no! Esistono infinite galassie! Gli infiniti non stanno affatto tutti in una stessa galassia! $Gal(x)$ è fatta da tutti i numeri del tipo $x + a$, dove a è un finito, eventualmente infinitesimo o nullo. I numeri M e $2M$ sono entrambi infiniti, ma la loro differenza è pure infinita e stanno quindi in galassie diverse.

Sogny:- Ma allora... la retta iperreale è immensamente più grande della retta reale! La retta reale sta tutta in una galassia, mentre nella retta iperreale ci sono infinite galassie!

Apotema:- Proprio così. Ci manca un'ultima relazione, quella di essere indistinguibili, ma non voglio mettere troppa carne sul fuoco e, per oggi, ci fermiamo qui. Vi assegno soltanto un altro esercizio. Provare a visualizzare sulla retta i tre numeri ε , ε^2 e ε^3 .

Scetty:- Ma, come si fa ad essere sicuri che esiste sempre un numero standard nella monade di un numero finito?

Apotema:- Sempre insoddisfatto il nostro Scetty! Prometto di risponderti, ma prima voglio che vi sia chiaro il significato di questa affermazione. Se prendo un punto della galassia principale, nella quale è immersa la vecchia retta reale, ecco che questo punto è sempre infinitamente vicino a un numero standard, eventualmente se stesso se il numero è standard. Come già avete dimostrato, è poi ovvio che in quella monade non ci possono essere altri numeri standard e che la parte standard è quindi unica.

Scetty:- Ancora una domanda. Come possiamo essere certi che i punti della retta iperreale siano in corrispondenza biunivoca coi numeri iperreali?

Apotema:- Ti rispondo con un'altra domanda. Come si fa ad essere certi che i punti della retta reale siano in corrispondenza

biunivoca coi numeri reali?

Bronty:- Non vale, prof!

Apotema:- Hai ragione, Bronty, e perciò risponderò io a tutte e due le domande. Una volta che sulla retta hai fissato un verso di percorrenza, un'origine e un segmento unità di misura, se prendi un punto ecco che gli assegni in modo univoco un numero reale, col solito processo di misura e col segno opportuno. Ma chi ti assicura che al numero decimale infinito e non periodico $1.2345678910111213\dots$ corrisponda un punto della retta? Se prendi un decimale finito o periodico, lo trasformi in frazione e, prendendo un opportuno multiplo di un opportuno sottomultiplo dell'unità, ecco che risulta individuato un ben preciso punto della retta. Ma, per il numero che ho scritto, come si dimostra che esiste un punto con quella coordinata? Dove va messo sulla retta?

Normy:- Tra 1 e 2, più vicino a 1!

Apotema:- Mi hai solo indicato un segmento, non un punto! -

Normy:- Tra 1.2 e 1.3, più vicino a 1.2! -

Apotema:- Mi hai ancora una volta indicato un segmento, non un punto!

Sekky:- Ma sono segmenti sempre più piccoli, professore! Alla fine ci sarà solo un punto che sta dentro tutti quei segmenti!

Apotema:- Posso essere d'accordo sul fatto che ce ne sarà al massimo uno. Infatti, due punti individuano un segmento e i segmenti delle approssimazioni precedenti diventeranno prima o poi più piccoli di quel segmento e non ci sarà più posto per tutti e due i punti. Ma chi ci garantisce che un punto ci sia?

(Silenzio)

Apotema:- Nessuno! Vi ho già detto che la retta non è una mosca che il naturalista può infilzare con un ago e osservare con la lente di ingrandimento! Il concetto intuitivo di retta esiste solo nella nostra testa! Ci troviamo a un bivio. Possiamo decidere che a certi numeri reali corrisponde un punto della retta, mentre a certi altri non si sa, oppure possiamo decidere che la retta ha tanti punti quanti sono i numeri reali! Nel primo caso la retta è un oggetto geometrico con grossi limiti, nel secondo caso è invece meravigliosamente utile! Dunque, noi decidiamo che la retta abbia tanti punti quanti sono i numeri reali!

Sekky:- Un postulato?

Apotema:- Esattamente.

Normy:- Come quello di Eudosso e Archimede?

Apotema:- Esattamente.

Scetty:- Allora anche nel caso dei numeri iperreali siamo noi che decidiamo che i punti della retta siano in corrispondenza biunivoca coi numeri iperreali?

Apotema:- Esattamente. Si tratta di due diversi modelli di retta e sceglieremo quello più utile per descrivere e risolvere i problemi che ci interessano. Approfitto della domanda per fornirvi una dimostrazione dell'esistenza della parte standard per ogni numero finito. Ovviamente basta farlo per un finito non standard, dato che la parte standard di un numero standard è il numero stesso. Inoltre possiamo supporre che il numero sia non infinitesimo, dato che gli infinitesimi hanno banalmente parte standard zero.

Scetty:- Su questo non ci piove!

Apotema:- Consideriamo allora un numero non standard finito non infinitesimo a e, per semplificare il ragionamento, supponiamo che si tratti di un numero positivo. Esso sarà compreso tra due numeri standard positivi e, in particolare, tra due interi non negativi.

Dubby:- Come mai?

Apotema:- Immagina che sia compreso tra 0.27 e 23.14. Se consideriamo gli interi 0, 1, 2, 3, ... , 24 ecco che, dovendo a essere compreso tra 0.27 e 23.14, e quindi a maggior ragione tra 0 e 24, dovrà cadere tra due interi consecutivi tra quelli elencati.

Dubby:- Ok!

Apotema:- Supponiamo, ad esempio, che sia $11 < a < 12$ e dividiamo l'intervallo tra 11 e 12 in dieci parti uguali mediante i punti 11, 11.1, 11.2, 11.3, ... , 11.9, 12. Il numero a dovrà cadere all'interno di uno di questi intervalli, per esempio $11.6 < a < 11.7$. Procedendo in questo modo, risulta definito un ben preciso numero standard s , che corrisponde all'unico punto contenuto in tutti gli intervalli così costruiti. Anche il numero a però risulta contenuto in tutti gli intervalli. Ecco allora che dovrà essere $|a - s| < 1$ per il fatto che a ed s cadono entrambi nel primo intervallo, quindi dovrà essere $|a - s| < 0.1$ perché essi cadono entrambi nel secondo intervallo, e così via. Ne segue che

$|a - s|$ dovrà essere minore di ogni numero standard positivo e quindi che $a - s$ è infinitesimo. Ma da $a - s \simeq 0$ segue $a \simeq s$. Dunque, s è un numero standard infinitamente vicino ad a e, per quanto detto in precedenza, è l'unico numero standard infinitamente vicino ad a !

Scetty:- Mi sembra allora di aver capito che l'esistenza della parte standard di un numero finito è in qualche modo equivalente all'affermazione che ogni sviluppo decimale infinito individua sempre un numero reale...

Apotema:- Hai colto nel segno!

Gioky:- A me piace tantissimo la retta iperreale!

Apotema:- Speriamo che duri!

LEZIONE VIII

Apotema:- Oggi vediamo l'importantissimo concetto di numeri indistinguibili.

Sekky:- Scusi, professore, ma avevamo dei compiti da correggere!

Apotema:- Ok, prima i compiti. Chi viene alla lavagna?

Sogny:- Io ho fatto solo il primo esercizio. Posso venire lo stesso?

Apotema:- E vieni a fare il primo esercizio!

Sogny:- Dovevamo visualizzare i numeri ε , ε^2 e ε^3 . Il fatto fondamentale è che ε^3 è un infinitesimo di ordine superiore a ε^2 , che a sua volta è un infinitesimo di ordine superiore a ε . Io ho cominciato col disegnare la retta nella scala ordinaria. I tre numeri, essendo infinitesimi, sembrano coincidere con lo zero. Inoltre, non riesco a separarli dallo zero con nessun microscopio standard. Ho allora usato un microscopio non-standard e ho regolato la manopola dell'ingrandimento fino a separare ε dallo zero. In quella scala, ε^2 e ε^3 sembrano ancora coincidere con lo zero e nessun microscopio standard riesce a separarli dall'origine. Ho usato allora un altro microscopio non-standard, puntato nel campo visivo del precedente, per separare dallo zero ε^2 . In quella scala, ε^3 sembra ancora coincidere con lo zero e non riesco a separarlo con nessun microscopio standard. Non mi resta che puntare un terzo microscopio non-standard nel campo visivo del secondo per separare finalmente anche ε^3 dallo zero!

Apotema:- Perfetto, Sogny! E come mai non hai fatto anche gli altri esercizi?

Sogny:- Forse non ci ho dedicato abbastanza tempo...

Apotema:- Prova a farli adesso! Dovevate dimostrare alcune proprietà della parte standard e confrontarle con quelle della funzione parte intera.

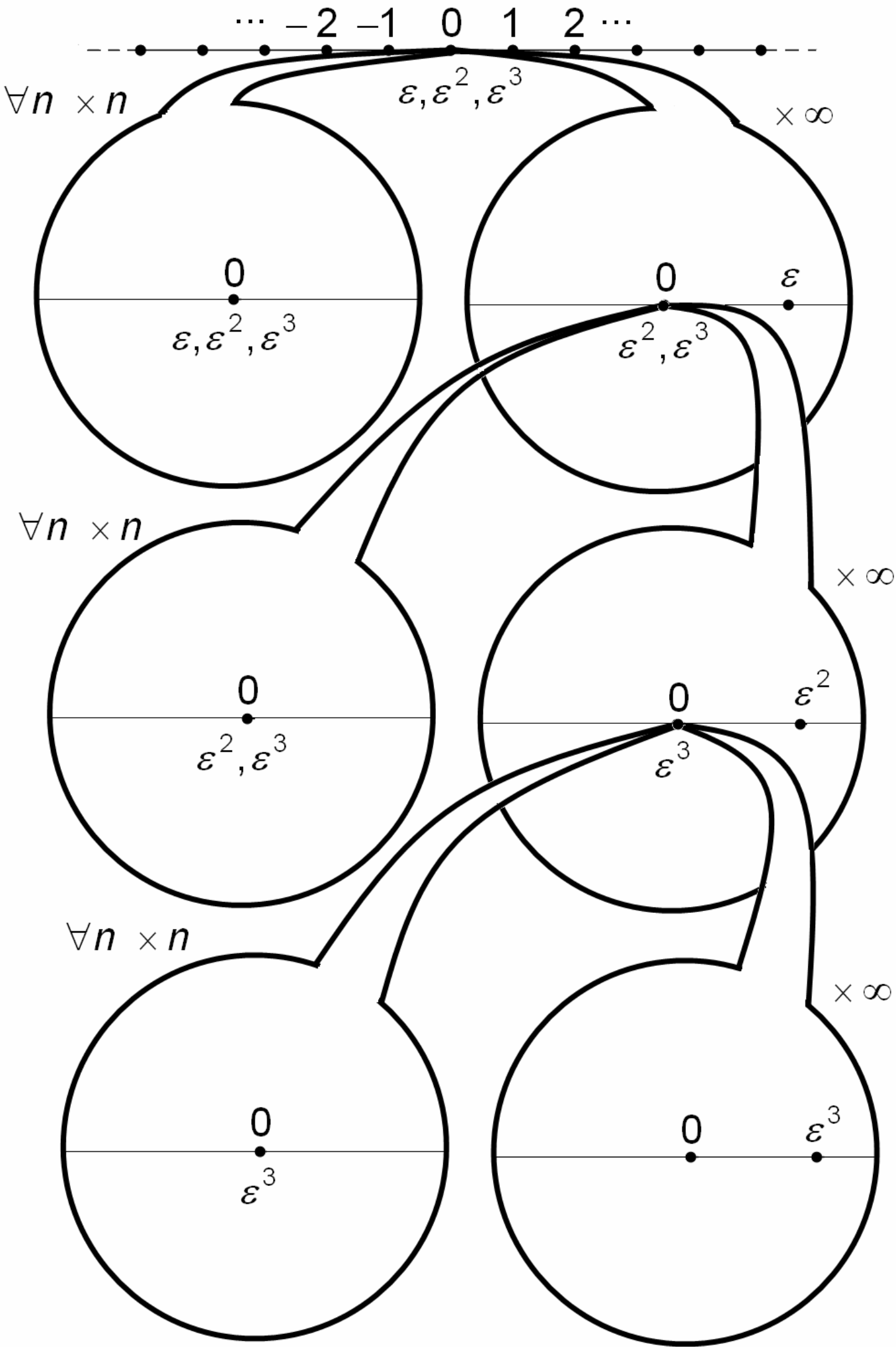
Sekky:- Parte intera inferiore, vero, professore?

Apotema:- Certo, Sekky. Mi riferivo alla parte intera inferiore.

Sogny:- Come prima cosa dovevamo far vedere che la parte

standard dell'opposto di un numero...

Apotema:- Un numero come?



Sogny:- Iperreale...

Apotema:- Non basta!

Sogny:- In che senso?

Apotema:- Che cos'è la parte standard di un numero?

Sogny:- È l'unico numero standard infinitamente vicino al numero dato!

Sekky:- Esiste solo per i numeri finiti!

Apotema:- Era questo che volevo sentirti dire, Sogny. Non esiste la parte standard di un numero infinito. Continua col testo dell'esercizio.

Sogny:- Dovevamo dimostrare che la parte standard dell'opposto di un numero finito è l'opposto della parte standard di quel numero. In formule: $st(-x) = -st(x)$.

Apotema:- La tecnica è la stessa dell'esercizio svolto in classe.

Svelty:- Posso scrivere x nella forma $s + \delta$, cioè come somma di un numero standard e di un infinitesimo!

Apotema:- Il fatto notevole è che questa scrittura è unica. Il numero s è la parte standard di x e il numero δ è la parte infinitesima. Adesso dovrebbe essere immediato, no?

Sogny:- Allora...

Apotema:- Se $x = s + \delta$, come lo scrivi $-x$?

Sogny:- Dunque... $-x = -s - \delta$.

Apotema:- Quindi hai scritto $-x$ come somma di un numero standard e di un infinitesimo. La sua parte standard qual è?

Sogny:- È il numero standard $-s$!

Apotema:- E siccome $s = st(x)$, ecco che $st(-x) = -s = -st(x)$. Tutto qua!

Sogny:- Credevo fosse più difficile!

Apotema:- Non è finito! Dovevi dirci se vale una proprietà analoga per la parte intera, e cioè se la parte intera dell'opposto è l'opposto della parte intera.

Sogny:- Direi proprio di sì!

Apotema:- Prima di sbilanciarti, prova almeno un esempio!

Sogny:- Se prendo $x = 2.6$ allora la sua parte intera è 2. E la parte intera del suo opposto, cioè di -2.6 , è -2 !

Svelty:- Sbagliato! La parte intera inferiore di -2.6 è -3 !

Sogny:- Ah, sì?

Apotema:- È il massimo intero minore o uguale al numero.

Sogny:- Allora non vale la proprietà $\lfloor -x \rfloor = -\lfloor x \rfloor$!

Apotema:- Decisamente, no. Vediamo se hai capito. Passa all'esercizio successivo.

Sogny:- Dovevamo dimostrare che la parte standard della differenza di due numeri...

Apotema:- Numeri... come?

Sogny:- ... finiti... è la differenza delle loro parti standard. Scrivo i due numeri come somma della loro parte standard con la loro parte infinitesima... $x = s + \delta$ e $y = t + \varepsilon$. La loro differenza vale allora $x - y = s + \delta - (t + \varepsilon) = (s - t) + (\delta - \varepsilon)$. La parte standard della differenza è allora $s - t$, che è proprio la differenza delle parti standard.

Apotema:- L'esercizio non è finito!

Sogny:- Devo vedere se vale la proprietà analoga per la parte intera, cioè se la parte intera della differenza è la differenza delle parti intere. Prendo $x = 5.4$ e $y = 3.2$. -

(Apotema fa una smorfia)

Sogny:- Qualcosa che non va?

Apotema:- Continua pure.

Sogny:- Abbiamo che $\lfloor x - y \rfloor = \lfloor 5.4 - 3.2 \rfloor = \lfloor 2.2 \rfloor = 2$, mentre $\lfloor 5.4 \rfloor - \lfloor 3.2 \rfloor = 5 - 3 = 2$... Allora vale!

Apotema:- Sogny, un solo esempio non dimostra la validità in generale, a meno che non contenga in sé un procedimento universale, mentre può dimostrare la non validità. Se ti ho proposto di fare un esempio è stato perché tu, guardandolo con attenzione, potessi capire meglio quello che può succedere in generale!

Svelty:- Questa volta ha funzionato perché la differenza delle parti decimali era positiva! Prova con 5.1 e 3.2!

Sogny:- Viene ... $\lfloor x - y \rfloor = \lfloor 5.1 - 3.2 \rfloor = \lfloor 1.9 \rfloor = 1$... e $\lfloor 5.1 \rfloor - \lfloor 3.2 \rfloor = 5 - 3 = 2$. Hai ragione, Svelty!

Apotema:- Conclusione?

Sogny:- Non è vero che la parte intera di una differenza è la differenza delle parti intere!

Ovvy:- Posso venire io a correggere gli altri esercizi?

Apotema:- Sì, Ovvy, vieni pure.

Ovvy:- Dovevamo dimostrare che $st(xy) = st(x)st(y)$. Usando la scrittura precedente, abbiamo che

$$xy = (s + \delta)(t + \varepsilon) = st + s\varepsilon + \delta t + \delta\varepsilon.$$

I tre numeri $s\varepsilon$, δt e $\delta\varepsilon$ sono infinitesimi, mentre st è standard. Ne segue che st è la parte standard di xy . Quindi $st(xy) = st = st(x)st(y)$.

Apotema:- Un po' infelice la scelta delle lettere s e t . Il prodotto st sembra indicare una parte standard!

Ovvy:- Adesso devo chiedermi se vale la proprietà $\lfloor xy \rfloor = \lfloor x \rfloor \lfloor y \rfloor$, ma è abbastanza ovvio che non vale, perché moltiplicando per un numero abbastanza grande, la parte decimale arriva a superare l'unità! Se prendo $x = 1.6$ e $y = 2$, allora $xy = 3.2$ e $\lfloor xy \rfloor = 3$, mentre $\lfloor x \rfloor = \lfloor 1.6 \rfloor = 1$ e $\lfloor y \rfloor = \lfloor 2 \rfloor = 2$, per cui $\lfloor x \rfloor \lfloor y \rfloor = 1 \times 2 = 2$.

Apotema:- Benissimo, Ovvy. Vedete che la differenza essenziale del comportamento tra la parte standard e la parte intera sta nel fatto che le parti infinitesime hanno un comportamento molto diverso dalle parti decimali.

Ovvy:- Dovevamo poi dimostrare che la parte standard di un quoziente è il quoziente delle parti standard, quando il denominatore non è infinitesimo. Usando i simboli di prima, dobbiamo dimostrare che $\frac{x}{y}$ ha come parte standard $\frac{s}{t}$. Io ho

ragionato così. Devo far vedere che la differenza $\frac{x}{y} - \frac{s}{t}$ è un infinitesimo.

Apotema:- Molto bene, Ovvy.

Abbiamo che

$$\frac{x}{y} - \frac{s}{t} = \frac{s + \delta}{t + \varepsilon} - \frac{s}{t} = \frac{st + t\delta - st - s\varepsilon}{t(t + \varepsilon)} = \frac{t\delta - s\varepsilon}{t(t + \varepsilon)}.$$

Il numeratore è del tipo $\mathbf{fni} \times \mathbf{i} - \mathbf{fni} \times \mathbf{i} = \mathbf{i} - \mathbf{i} = \mathbf{i}$, mentre il denominatore è del tipo $\mathbf{fni} \times (\mathbf{fni} + \mathbf{i}) = \mathbf{fni} \times \mathbf{fni} = \mathbf{fni}$. Il risultato è

quindi del tipo $\frac{\mathbf{i}}{\mathbf{fni}} = \mathbf{i}$. -

Scetty:- E dove hai usato l'ipotesi che y non sia infinitesimo? -

Ovvy:- Dire che un numero finito non è infinitesimo è come dire che la sua parte standard non è zero. Nei calcoli precedenti ho infatti supposto che sia $t \neq 0$. Se $t = 0$ addirittura non esiste il quoziente delle parti standard!

Apotema:- C'era ancora qualcos'altro?

Ovvy:- Sì, prof. Dovevamo dimostrare che se la parte standard di un numero è positiva, allora anche il numero è positivo, mentre se un numero è positivo possiamo solo dedurre che la parte standard non è negativa.

Apotema:- E ci sei riuscito?

Ovvy:- Direi proprio di sì! Se $st(x) > 0$, allora $x = s + \delta$, con $s > 0$. Siccome δ è infinitesimo, anche se è negativo, $s + \delta$ resta sempre positivo! In termini geometrici, al massimo usando un microscopio standard, possiamo usare una scala in cui s è separato dallo zero e nella quale δ è come un punto. La somma non può quindi essere negativa!

Apotema:- Può andare.

Geny:- Io ho osservato che, siccome $\frac{s}{2}$ è un numero standard

positivo e δ è infinitesimo, deve essere $|\delta| < \frac{s}{2}$ e quindi posso

concludere che $s + \delta > s - |\delta| > s - \frac{s}{2} = \frac{s}{2}$. In altre parole,

siccome δ è infinitesimo, anche se è negativo di sicuro se lo sommiamo a s lo fa indietreggiare per meno di $\frac{s}{2}$...

Ovvy:- Se è per questo, anche meno di $\frac{s}{1\,000\,000\,000}$!

Geny:- Certo! Ma ho scelto la frazione più comoda!

Apotema:- Impeccabile, Geny, ma in fondo la dimostrazione di Ovvy era giusta. Vediamo invece come mai non vale esattamente il viceversa.

Ovvy:- Semplice! Se x è positivo, ma infinitesimo, la sua parte standard vale zero!

Apotema:- Bravissimo! Puoi andare al posto con onore! Passiamo allora al concetto di indistinguibilità. Si tratta di una relazione tra numeri come quella di essere infinitamente vicini o finitamente vicini, ma questa volta viene escluso lo zero. Vediamo prima di darne un'immagine geometrica e consideriamo quindi una coppia di segmenti non nulli. Quand'è che voi direste che sono indistinguibili?

Normy:- Se differiscono di un segmento infinitesimo!

Apotema:- Immagino tu stia inconsapevolmente pensando a due segmenti finiti non infinitesimi, Normy. E se i due segmenti sono infinitesimi? Quando diresti che sono indistinguibili?

Normy:- Quando, osservati a un microscopio non-standard, non si riescono a distinguere!

Apotema:- Dillo meglio. Che cosa significa che, nella scala di un microscopio non-standard non riesci a distinguerli?

Gioky:- Che la loro differenza è infinitesima anche nella scala in cui si vedono ben distinti gli estremi dei segmenti infinitesimi! Due microbi sono indistinguibili se differiscono per un loro pelo! E così' due segmenti infinitesimi sono indistinguibili se differiscono per un infinitesimo di ordine superiore a entrambi!

Apotema:- Benissimo, Gioky. E se i due segmenti sono infiniti? Quand'è che due segmenti infiniti si devono considerare indistinguibili?

Gioky:- Quando nella scala di uno zoom che consente di vedere ben separati gli estremi dei segmenti, le loro differenze sembrano infinitesime!

Apotema:- Qual è allora la definizione generale di segmenti indistinguibili?

Gioky:- Due segmenti sono indistinguibili se, osservati a una scala in cui i loro estremi risultano visibili e ben separati, la loro differenza sembra infinitesima!

Apotema:- Questa è proprio l'idea giusta! Due numeri non nulli, e sottolineo non nulli, si dicono indistinguibili se la loro differenza è infinitesima rispetto a ciascuno di essi. In termini più precisi, due numeri non nulli x e y si dicono indistinguibili se $\frac{x-y}{x} \simeq 0$ e

$$\frac{x-y}{y} \simeq 0.$$

Sekky:- Scusi, professore, ma non ho capito perché dobbiamo escludere lo zero.

Apotema:- Se pensi ai segmenti, il segmento nullo è un punto a qualsiasi scala e non può mai risultare indistinguibile da un segmento non nullo.

Dubby:- Ma se due segmenti, in una certa scala in cui si possono vedere dall'inizio alla fine, sembrano differire di un infinitesimo, mi viene da dire che se la loro differenza è infinitesima rispetto a uno dei due, allora è automaticamente

infinitesima anche rispetto all'altro!

Apotema:- E infatti hai ragione, Dubby! Basta richiedere che valga una sola delle due condizioni precedenti e, automaticamente, è verificata anche l'altra. Ma c'è un altro modo di affermare che due numeri non nulli sono indistinguibili. Vediamo chi me lo dice!

Geny:- Abbiamo visto che per confrontare due numeri se ne fa il rapporto. Due numeri sono indistinguibili se sembrano uguali e quindi se il loro rapporto è infinitamente vicino a 1!

Apotema:- Proprio così. Un altro modo, molto suggestivo, di dire che due numeri non nulli x e y sono indistinguibili è di

richiedere che sia $\frac{x}{y} \simeq 1$ o, che è la stessa cosa, $st\left(\frac{x}{y}\right) = 1$. Per

indicare che x e y sono indistinguibili, scriveremo $x \sim y$.

Scetty:- Siamo sicuri che avere il rapporto infinitamente vicino a 1 sia la stessa cosa che avere la differenza infinitesima rispetto a uno dei due ? -

Apotema:- Consideriamo due numeri x e y non nulli, non importa di che tipo, con $st\left(\frac{x}{y}\right) = 1$. Questo significa che

$\frac{x}{y} = 1 + \delta$, con δ infinitesimo, eventualmente nullo. Ne segue

che $x = y + y\delta$ e quindi che $x - y = y\delta$, da cui $\frac{x - y}{y} = \delta$.

Dunque se il rapporto di due numeri è infinitamente vicino a 1, allora la loro differenza è infinitesima rispetto a ciascuno dei due. Siccome i passaggi algebrici possono essere rifatti nell'ordine inverso, vale anche il viceversa e cioè che se la differenza di due numeri è infinitesima rispetto a uno dei due allora il loro rapporto è infinitamente vicino a 1.

Scetty:- Ma noi abbiamo visto che $x - y$ è un infinitesimo soltanto rispetto a y !

Apotema:- La situazione è perfettamente simmetrica, perché se

$st\left(\frac{x}{y}\right) = 1$ allora $st\left(\frac{y}{x}\right) = 1$ e viceversa.

Normy:- Ma a cosa serve sapere che due numeri sono

indistinguibili ?

Apotema:- In parole povere, ci consente di scambiare un'espressione con una più semplice in molte situazioni importanti. Niente di meglio che cominciare a vedere qualcosa. Vi scrivo alcune espressioni iperreali e voi dovete ogni volta trovare un'espressione indistinguibile più semplice. Comincio da $a + \delta$.

Svelty:- È indistinguibile da a !

Apotema:- Esatto. Infatti $\frac{a + \delta}{a} = 1 + \frac{\delta}{a} \simeq 1$, essendo $\frac{\delta}{a}$ infinitesimo.

Geny:- Per due finiti non infinitesimi, essere indistinguibili equivale allora a essere infinitamente vicini!

Apotema:- Proprio così! Affermare che $a \simeq b$ è la stessa cosa che affermare che $a \sim b$.

Bronty:- Molto utile! Due simboli diversi per dire la stessa cosa!

Apotema:- La stessa cosa solo per i finiti non infinitesimi! Secondo voi, per due infinitesimi non nulli, è la stessa cosa scrivere che $\varepsilon \sim \delta$ o che $\varepsilon \simeq \delta$?

Geny:- No! La seconda relazione vale addirittura sempre! Due infinitesimi sono sempre infinitamente vicini, ma non è affatto detto che siano indistinguibili!

Fuory:- Forse sono indistinguibili se sono dello stesso ordine!

Geny:- Falso! Gli infinitesimi 2ε e ε sono dello stesso ordine, il loro rapporto vale 2, ma non sono indistinguibili! Se sono indistinguibili il loro rapporto è infinitamente vicino a 1 e, in particolare, è finito non infinitesimo e quindi sono dello stesso ordine, ma se sono dello stesso ordine non è detto che siano indistinguibili!

Apotema:- Per gli infinitesimi, essere indistinguibili è una richiesta ancora più forte che essere dello stesso ordine. Mentre la richiesta di esser infinitamente vicini non è nemmeno una richiesta, perché due infinitesimi sono sempre infinitamente vicini! Chi mi trova un indistinguibile semplice per $\delta + \delta^2$?

Gioky:- δ ! Facilissimo! Dire che due infinitesimi sono indistinguibili equivale a dire che differiscono per un infinitesimo di ordine superiore!

Apotema:- Trovatemi ora un indistinguibile più semplice per $M + a$.

(Quasi tutta la classe):- M !

Apotema:- E per $M + \delta$?

(Tutta la classe):- M !

Apotema:- Quando, in generale, due infiniti sono indistinguibili?

Fuory:- Quando differiscono per un finito non infinitesimo o per un infinitesimo non nullo!

Apotema:- Non sono i soli casi possibili! Ne manca uno! Voglio aiutarvi. Trovatevi un indistinguibile semplice per $M^2 + M$!

Svelty:- M^2 ! Perché M è un infinito di ordine inferiore a M^2 e rispetto a quest'ultimo è un infinitesimo!

Apotema:- Due infiniti, come ogni coppia di numeri non nulli, sono indistinguibili se la loro differenza è infinitesima rispetto ad essi e quindi se è un infinitesimo non nullo, un finito non infinitesimo o... un infinito di ordine inferiore! Svelty ha fatto centro!

Geny:- Per gli infiniti, essere indistinguibili è allora una richiesta più debole che essere infinitamente vicini! Addirittura più debole che essere finitamente vicini!

Normy:- Cosa hai voluto dire?

Geny:- Che se due infiniti sono infinitamente o finitamente vicini sono anche indistinguibili, ma non vale il viceversa: potrebbero essere indistinguibili ma differire per un infinito.

Apotema:- In altre parole, se due infiniti appartengono a una stessa monade o a una stessa galassia allora sono indistinguibili, ma non vale il viceversa. Due infiniti indistinguibili potrebbero anche appartenere a galassie diverse, come nel caso di $M^2 + M$ e M^2 . Fin dalla prossima lezione vedremo l'importanza di lavorare con numeri indistinguibili. Ci servirà conoscere qualche proprietà, che vi lascio da dimostrare per casa. Se $x \sim x'$ e $y \sim y'$, provate a dimostrare che

$$1) \ x + y \sim x' + y'; \quad 2) \ xy \sim x'y'; \quad 3) \ x - y \sim x' - y';$$

$$4) \ \frac{x}{y} \sim \frac{x'}{y'}.$$

Ormai siamo a buon punto e, dalla prossima lezione, potremo imparare un modo potente di calcolare con gli iperreali! Buon lavoro, ragazzi!

LA FILASTROCCA DEGLI IPERREALI

(by Giorgio Goldoni)

Tu affronterai dei problemi speciali
grazie ai metodi infinitesimali
il cui segreto è di usare spediti
gli infinitesimi e gli infiniti

Di tutto questo non troverai niente
tra tutto ciò che tu imparasti a mente
Non bastan più infatti i vecchi reali:
servono i numeri iperreali!

Ti voglio dire che tutto avrà inizio
nel superare quel gran pregiudizio
che riportando più volte un campione
tu possa uscire da ogni regione

Se accetterai ciò che par paradosso
e negherai il postulato di Eudosso
tu vincerai come premio finale
il calcol detto infinitesimale

Distinguerai tra infiniti e finiti
e tra questi ultimi altri due tipi:
gli infinitesimi e quelli no.
Sembra impossibile e invece si può!

Con questi numeri le operazioni
si posson far senza gran variazioni
ed a seconda dei tipi che hai usato
potrai dire il tipo del risultato

Tranne in casistiche sfortunate
che son le forme indeterminate
Ma il risultato esiste lo stesso
pur se a trovarlo faticherai spesso.

Ora la retta avrà molti più punti
di quanti prima ne avessi presunti
ed anche se sembrerà un po' artefatta
per più problemi si mostrerà adatta

Avrai strumenti con ottiche fini
per esplorar della retta i confini
e vedrai monadi comodamente
e altre galassie con la tua lente!

Confronterai delta quadro con delta
e imparerai abbastanza alla svelta
che il prim dei due che ti ho nominato
nella lor somma sarà trascurato

Sarà il viceversa per gli infiniti:
son sempre i piccoli ad esser banditi!
Questa la regola che tu usi fiero
a meno che il risultato sia zero!

Ma prima che queste rime sian morte
voglio svelarti il trucco più forte
che per resolver problemi è la via
e che è del cacol la filosofia

Non dovrai mai affrontare di petto
il tuo problema appena l'hai letto
ma cercherai una via approssimata
che a prima vista può sembrar sbagliata

Quello che importa è sol che l'errore
tu possa renderlo senza timore
come se fosse per incantesimo
piccolo piccolo: infinitesimo!

Ecco che allora il ver risultato
la parte standard ti avrà già mostrato
Questo il più grande tra tutti i regali
fatti dai numeri iperreali!

COLLANA *"Il professor Apotema insegna..."*

VOLUMI PUBBLICATI

1. Le funzioni lineari, esponenziali, logaritmiche e potenze
2. I numeri iperreali
3. Il calcolo delle differenze e il calcolo differenziale
4. Il calcolo delle somme e il calcolo integrale
5. Le serie e gli integrali impropri
6. I numeri complessi del piano e dello spazio
7. Il linguaggio degli insiemi e dei predicati
8. La geometria del piano col metodo delle coordinate
9. La geometria dello spazio col metodo delle coordinate

VOLUMI DI PROSSIMA PUBBLICAZIONE

10. Il calcolo infinitesimale in più variabili
11. La trigonometria piana e sferica
12. Le equazioni alle differenze e le equazioni differenziali
13. L'analisi di Fourier

ALTRI LIBRI DELL'AUTORE

Le lezioni del professor Apotema
Persone che... contano!
Le geometrie non euclidee

